01;03

Точное частное решение для равновесной конфигурации незаряженной проводящей струи в поперечном электрическом поле

© *Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 18 мая 2005 г.

Рассмотрена задача о равновесной конфигурации поверхности незаряженной проводящей струи, находящейся во внешнем поперечном электрическом поле. Установлена аналогия между этой задачей электростатики и задачей о потенциальном обтекании идеальной жидкостью двумерного газового пузыря, для анализа которой развиты эффективные аналитические методы. Это позволило построить и исследовать на устойчивость точное решение для формы струи, соответствующее частному случаю, когда разность между внешним и внутренним давлениями обращается в нуль. Это решение отличает значительная степень деформации — отношение характерных размеров в сечении составляет 23/4.

В отсутствие внешнего электрического поля единственно возможной равновесной конфигурацией струи является струя круглого сечения. Поместим струю проводящей жидкости в электрическое поле напряженностью E, которое направлено перпендикулярно ее оси. Так как внешнее электрическое поле не проникает в проводящую жидкость, на ее поверхности будут индуцироваться электрические заряды. Силы, действующие на заряды со стороны внешнего электрического поля, приведут к азимутальной деформации поверхности струи — растяжению вдоль направления поля. При компенсации электростатических сил силами поверхностного натяжения возникнет новая равновесная конфигурация поверхности.

Известно, что (в отсутствие электрического поля) влияние капиллярных сил приводит к неустойчивости поверхности струи круглого сечения. Развиваются продольные возмущения с длиной волны, превышающей длину окружности, — так называемая рэлеевская неустойчивость [1]. Для того чтобы провести анализ устойчивости помещенной в электрическое поле струи, в первую очередь требуется найти решение для ее невозмущенного состояния. Струя круглого сечения уже не будет подобным решением, и нам следует выяснить, каким образом сечение струи деформируется за счет электростатических сил. В настоящей работе мы найдем частное решение этой задачи для выделенного случая, когда разность давлений внутри и снаружи струи (P) равна нулю, а также обсудим условия существования решений для произвольных P. Отметим, что в работах [2,3] был найден широкий класс точных решений сходной задачи о конфигурации заряженной струи проводящей жидкости.

Будем полагать, что поперечное сечение струи не меняется в направлении ее движения, а жидкость покоится в системе координат, движущейся вместе со струей. Тогда распределение потенциала электрического поля φ в плоскости поперечного сечения струи $\{x, y\}$ задается двумерным уравнением Лапласа:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$

Его следует решать совместно с условием эквипотенциальности поверхности проводника, $\varphi = 0$, а также условием того, что на бесконечности электрическое поле однородно:

$$\varphi \to -Ey, \quad x^2 + y^2 \to \infty.$$

Равновесный рельеф заряженной границы проводящей жидкости определяется условием баланса сил, действующих на поверхность:

$$(8\pi)^{-1}(\nabla\varphi)^2_{\varphi=0} + \alpha K + P = 0, \tag{1}$$

где первое слагаемое имеет смысл электростатического давления на границе жидкости, а второе — поверхностного давления (α — коэффициент поверхностного натяжения, K — локальная кривизна поверхности).

Сравнивая эти уравнения с уравнениями работы [4], определяющими форму движущегося в идеальной жидкости газового пузыря, можно обнаружить, что они совпадают с точностью до замен:

$$E \to -\sqrt{4\pi\rho}\, V, \quad \varphi \to \sqrt{4\pi\rho}\, \psi.$$

Здесь V — скорость обтекающей пузырь жидкости, ρ — ее плотность, а ψ — функция тока. Условие баланса сил (1) тогда превращается в стационарное уравнение Бернулли, записанное для границы пузыря. Постоянная P в этом уравнении будет задавать разность между давлением в пузыре и плотностью энергии жидкости на бесконечности.

Точное решение для пузыря в частном случае, когда $P = 0$, было найдено в [4]. Соответствующая этим решениям форма струи задается выражениями

$$x = \frac{8\pi\alpha}{9E^2}\left(\cos s - \frac{1}{9}\cos 3s\right), \tag{2}$$

$$y = \frac{8\pi\alpha}{9E^2}\left(5\sin s - \frac{1}{9}\sin 3s\right), \tag{3}$$

где s — параметр $(0 < s \leq 2\pi)$. Из них видно, что электрическое поле приводит к сильной деформации струи — отношение характерных размеров струи в ее поперечном сечении составляет 23/4.

Покажем, что это решение неустойчиво по отношению к азимутальным деформациям поверхности. Построим семейство „возмущенных“ решений для равновесных конфигураций струи, соответствующее отличной от нуля (но малой) разности внутреннего и внешнего давлений P. Ограничиваясь учетом членов нулевого и первого порядка в разложении по малому безразмерному параметру $p = 8\pi P/(81E^2)$, получим для профиля струи:

$$x = \frac{8\pi\alpha}{9E^2}\left((1+113p)\cos s - \frac{1-133p}{9}\cos 3s + \frac{2p}{5}\cos 5s\right), \tag{4}$$

$$y = \frac{8\pi\alpha}{9E^2}\left((5-119p)\sin s + \frac{1-133p}{9}\sin 3s - \frac{2p}{5}\sin 5s\right). \tag{5}$$

Следует отметить, что аналогичные разложения для двумерных пузырей рассматривались в работе [5].

Степень деформации поверхности струи удобно характеризовать отношением ее размеров в направлениях осей y и x:

$$\frac{y_{\max}}{x_{\max}} \approx \frac{23}{4} - \frac{9801}{10}\,p. \tag{6}$$

Отсюда видно, что увеличение параметра p приводит к сжатию струи, а уменьшение p — к ее растяжению.

Несложно найти площадь поперечного сечения струи для возмущенных решений (4) и (5):

$$S \approx \frac{2^8\pi^3\alpha^2}{3^6E^4}\,(67 + 6154p). \qquad (7)$$

Из этого соотношения видно, что при фиксированном S увеличение (уменьшение) электрического поля приводит к увеличению (уменьшению) p и, принимая во внимание (6), к сжатию (растяжению) струи в направлении y. Непосредственно отсюда следует вывод о том, что решение (2) и (3) неустойчиво по отношению к малым возмущениям поверхности. В устойчивой области увеличение внешнего поля и, следовательно, деформирующей силы должно приводить к растяжению струи. Это означает, что устойчивые конфигурации должны соответствовать намного меньшим, чем 23/4, деформациям струи.

Монотонный характер зависимости E от p, определяемый соотношением (7), должен нарушаться при достаточно больших p, т. е. за пределами применимости выражений (4) и (5). Действительно, в отсутствие поля $(E = 0)$ струя будет круглой. Из условия баланса сил (1) видно, что для струи с круглым сечением разность давлений конечна: $P = \alpha\sqrt{\pi/S}$. В таком случае справедливо: $E \to 0$ при $p \to \infty$. Как следствие, в зависимости E от p должен существовать экстремум, $E_{\max}$. По порядку величины он совпадает с полем, соответствующим точному решению (2) и (3):

$$E_{\max}^4 \propto \alpha^2 S^{-1}.$$

При превышении этого порогового значения поля существование равновесных конфигураций струй принципиально невозможно. Аналогичный критерий известен для незаряженной капли проводящей жидкости во внешнем электрическом поле — см. работы [6,7].

Данная работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований президиума РАН „Математические методы в нелинейной динамике“, при поддержке президента РФ (проект МК$-$2149.2004.2) и Фонда некоммерческих программ „Династия“.

Список литературы

[1] *Lord Rayleigh.* // Proc. London Math. Soc. 1878. V. 10. P. 4.
[2] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 1. С. 51–55.
[3] *Zubarev N.M.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. Art. no 016 307 (6).
[4] *McLeod E.B.* // J. Rat. Mech. Anal. 1955. V. 4. P. 557–567.
[5] *Shankar P.N.* // J. Fluid Mech. 1992. V. 244. P. 187–200.
[6] *Taylor G.* // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1964. V. 280. P. 383–397.
[7] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. В. 9. С. 1706–1713.