

01;09

Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора

© В.С. Анищенко, С.М. Николаев

Саратовский государственный университет
E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 8 апреля 2005 г.

Вводится новая автономная дифференциальная динамическая система размерности $N = 4$, имеющая в качестве решения устойчивые двухчастотные колебания. Показано, что система реализует последовательность бифуркаций удвоения периода двумерных эргодических торов. Установлено, что при бифуркации удвоения резонансов на торе не наблюдается, удваивается эргодический тор.

Одной из интересных проблем нелинейной динамики является исследование бифуркаций квазипериодических колебаний и переходов к хаосу в результате их разрушения. Известны классические механизмы Ландау–Хопфа [1,2], Рюэля–Такенса [3,4] и Афраймовича–Шильникова [5], описывающие детали переходов к хаосу через многочастотные колебания. Анализ этой проблемы посвящено много работ, использующих широкий класс реальных и модельных динамических систем [6]. При этом для получения режимов квазипериодических колебаний наиболее часто используются дискретные и дифференциальные системы с внешним периодическим возмущением, т. е. неавтономные.

Представляется интересным разработать наиболее простую автономную дифференциальную систему, способную иметь в качестве решения устойчивые двухчастотные колебания и демонстрировать основные бифуркационные механизмы их разрушения, включая бифуркацию удвоения. Несмотря на тот факт, что удвоение двумерного тора было открыто много лет назад [7–9], детали бифуркационного механизма удвоения эргодического тора до сих пор во многом остаются неясными.

Двумерный тор можно реализовать в трехмерной автономной диссипативной системе, как, например, показано в [10]. Однако реализация бифуркации удвоения тора требует повышения размерности системы до $N \geq 4$.

В настоящей работе предложена наиболее простая автономная динамическая система размерности $N = 4$, реализующая режим устойчивого двумерного тора, демонстрирующая бифуркации удвоения тора и переходы к хаосу при его разрушении. На предложенной модели исследованы некоторые детали бифуркационного механизма удвоения двумерного эргодического тора.

В качестве исходной рассмотрим известную модель генератора Анищенко–Астахова [11]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + g\Phi(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Первые два уравнения системы (1) описывают генератор Ван дер Поля. При конечных значениях g проявляется инерционный характер воздействия на усилительный каскад генератора, что служит основной причиной возникновения режима хаотических колебаний. Третье уравнение системы (1) описывает инерционный каскад дополнительной обратной связи, включающий нелинейный преобразователь $\Phi(x)$, который может быть задан функцией типа $(e^x - 1)$ или $I(x)x^2$, где $I(x) = 1$ ($x > 0$) и $I(x) = 0$ ($x \leq 0$).

Для достижения поставленной цели изменим инерционный каскад дополнительной обратной связи, повышающий размерность уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz, \end{aligned} \quad (2)$$

где γ — параметр затухания нового фильтра, а g — параметр, характеризующий его инерционность. Уравнения (2) представляют собой уравнение диссипативного контура в режиме вынужденных колебаний:

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + gz = \gamma\Phi(x). \quad (3)$$

Для обеспечения режима незатухающих автономных колебаний, как показали исследования, достаточно вместо управляющего сигнала $z(t)$ (см. уравнения (1)) использовать его производную $\dot{z}(t) = \varphi(t)$. В этом

случае уравнения нового генератора принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - x\varphi - dx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= \varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\gamma\varphi + \gamma\Phi(x) - gz. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) является нелинейной диссипативной динамической системой размерности $N = 4$ и характеризуется четырьмя управляющими параметрами: m — параметр возбуждения, d — параметр нелинейной диссипации, γ — параметр затухания и g — параметр инерционности фильтра.

В численном эксперименте нами установлено, что система (4) может реализовать режим устойчивого двумерного тора, бифуркации удвоения и разрушения тора с переходом к хаосу. Кроме того, в системе (4) при малых значениях параметра g (когда система (4) близка к системе (1)) наблюдаются бифуркации удвоения периода циклов и переход к хаосу, как и в генераторе Анищенко–Астахова.

На рис. 1, *a* представлена бифуркационная диаграмма режимов системы (4) на плоскости управляющих параметров m и g при фиксированных значениях параметров $\gamma = 0.2$ и $d = 0.001$, функция $\Phi(x)$ задавалась в виде $I(x)x^2$.

На линии $m = 0$ в соответствии с мягкой бифуркацией Андронова–Хопфа рождается устойчивый предельный цикл T_0 , который при пересечении бифуркационной линии l_1 претерпевает бифуркацию удвоения периода, на линии l_2 бифуркацию удвоения периода претерпевает цикл, возникший на линии l_1 (рис. 1, *a*). Бифуркационная линия l_t отвечает условию выхода на единичную окружность пары комплексно-сопряженных мультипликаторов цикла T_0 и мягкому рождению двумерного тора ($\mu_{1,2} = e^{\pm j\phi}$). Естественно, двигаясь вдоль линии l_t , угол ϕ будет пробегать множество рациональных значений, отвечающих резонансам на торе. В качестве примера на рис. 1, *a* нанесена область резонанса $\phi = 1 : 4$, ограниченная линиями l_r , опирающаяся на точку A коразмерности 2. Выше линии рождения тора l_t показана линия l_u , при пересечении которой снизу вверх наблюдается переход к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний. На линии l_c имеет место кризис (разрушение) возникшего на линии l_u хаотического аттрактора. Линия l_{dc} отвечает бифуркации слияния и последующего исчезновения

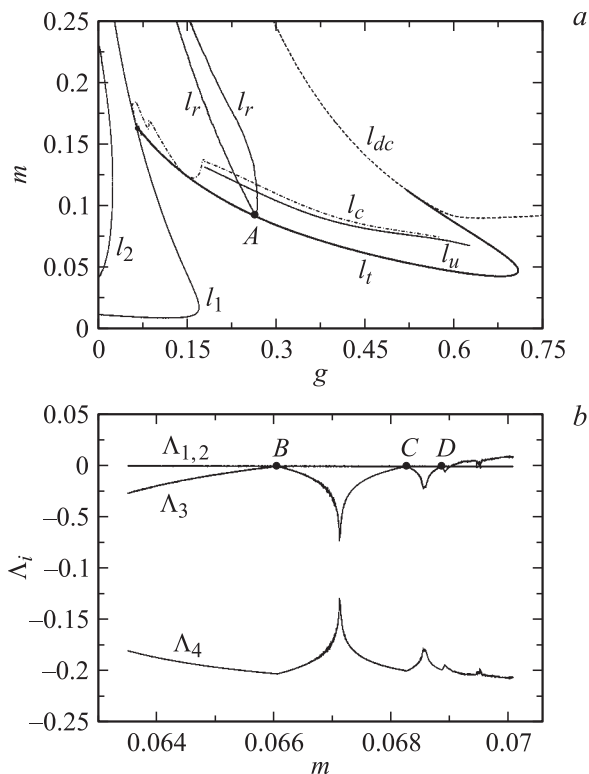


Рис. 1. *a* — бифуркационная диаграмма режимов генератора ($\gamma = 0.2$, $d = 0.001$). $l_{1,2}$ — линии бифуркаций удвоения периода цикла, l_t — линия рождения тора, l_u — линия разрушения тора, l_c — линия разрушения хаотического аттрактора, l_r — линии, ограничивающие область резонанса на торе 1:4, l_{dc} — линия кратных циклов, A — точка коразмерности 2, отвечающая условию $\phi = 1:4$. *b* — график зависимости спектра показателей Ляпунова от параметра m ($d = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $g = 0.5$) в области значений параметров между линиями l_t и l_u . (B, C, D — точки бифуркаций удвоения тора).

пары седловых циклов. В области между линиями l_t и l_u наблюдаются бифуркации удвоения двумерного тора.

Зафиксируем значения параметров $g = 0.5$, $d = 0.001$ и $\gamma = 0.2$ и рассмотрим эволюцию режима тора в области значений параметра m между указанными линиями l_t и l_u . На рис. 2, *a-f* представлены проек-

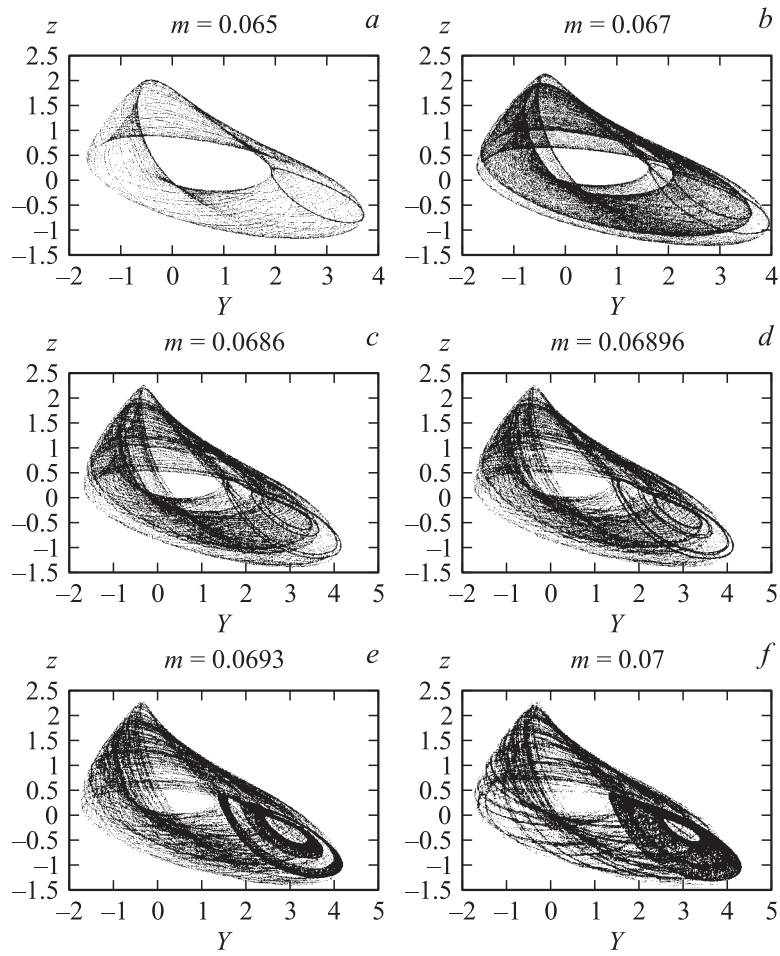


Рис. 2. Проекция аттракторов системы (4) и соответствующих сечений Пуанкаре на плоскость при изменении параметра m для значений $d = 0.001$, $\gamma = 0.2$, $g = 0.5$.

ции аттракторов на плоскость при прохождении точек бифуркаций удвоения двумерного тора. Об удвоении четко свидетельствует структура сечения Пуанкаре, а также анализ временных реализаций и их спектров

мощности. Бифуркации удвоения периода тора здесь соответствует бифуркация удвоения периода модуляции (или бифуркация удвоения периода цикла в отображении Пуанкаре).

С точки зрения теории бифуркаций важным является ответ на вопрос, удваивается ли эргодический тор или вблизи точки бифуркации сначала имеет место резонанс на торе, удвоение резонансного цикла, из которого затем образуется удвоенный тор? Для ответа на этот вопрос производился расчет полного спектра показателей Ляпунова при прохождении точек бифуркаций (см. рис. 1, *b*).

Как видно из рис. 1, *b*, в точках бифуркаций (точки *B*, *C*, *D*) в ноль обращаются сразу три старших показателя Ляпунова ($\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$). Бифуркационный переход характеризуется следующим изменением сигнатуры спектра ляпуновских характеристических показателей:

$$\begin{array}{ccccc} 0, 0, -, - & \implies & 0, 0, 0, - & \implies & 0, 0, -, - \\ \text{тор}_2 & & \text{тор}_3 & & \text{тор}_2 \end{array}$$

Расчеты проводились с очень малым шагом по параметру m ($\Delta m = 3 \times 10^{-6}$) и свидетельствуют о том, что при прохождении точки бифуркации рождение предельного цикла (спектр показателей Ляпунова $0, -, -, -$) не наблюдается! В бифуркационной точке мы имеем дело со структурно-неустойчивым трехмерным тором, который порождает далее устойчивый удвоенный эргодический двумерный тор. Таким образом, приведенные данные еще раз подтверждают результаты работы [12], в которой этот вывод был сделан впервые. Бифуркацию удвоения периода претерпевает эргодический тор; резонансных циклов в численном эксперименте не наблюдается.

Таким образом, введенная в рассмотрение новая динамическая система (4) действительно включает возможность реализации устойчивого режима эргодических двухчастотных колебаний (режим двумерного тора) и демонстрирует бифуркации удвоения периода модуляции (удвоения двумерного тора). Предложенная автономная система (4) является наиболее простой для исследования бифуркаций квазипериодических колебаний с двумя независимыми частотами, детальный анализ которых не является целью настоящей работы, но будет проведен в будущем.

Работа выполнена при поддержке программы BRNE (грант SR-006-XI) и гранта РФФИ (Е 02-3.2-345).

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д. // ДАН СССР. 1944. Т. 44. № 8. С. 339–342.
- [2] Hopf E. // Comm. Pure. Appl. Math. 1948. V. 1. P. 303–322.
- [3] Рюэль Д., Такенс Ф. Странные аттракторы / Под ред. Синая Я.Г. и Шильникова Л.П. М.: Мир, 1981. С. 117–151.
- [4] Newhouse S., Ruelle D., Takens F. // Comm. Math. Phys. 1978. V. 64. P. 35–40.
- [5] Абраймович В.С., Шильников Л.П. Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький: Изд-во ГГУ, 1983. С. 3–26.
- [6] Анищенко В.С. // ЖТФ. 1986. Т. 56. № 2. С. 225–237.
- [7] Анищенко В.С. // Флуктуационные явления в физических системах. III Всесоюзная конференция, 28–29 сентября 1982. Вильнюс: Изд-во АН ЛитССР, 1983. С. 24–26.
- [8] Franceschini V. // Physica D. 1983. V. 6D. 3. P. 285–304.
- [9] Kaneko K. Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems. Singapore: World Scientific, 1986. 264 p.
- [10] Matsumoto T., Chua L.O., Tokunada R. // IEEE trans., Circuits Syst. CAS-34. 1987. V. 3.
- [11] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М., 1990. 312 с.
- [12] Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 9. С. 1112–1125.