

01;05.2

## **Устойчивые колебания и эффективное ускорение заряженных частиц в пучности электрического поля стоячей электромагнитной волны**

© А.Ф. Курин

Воронежский государственный университет  
E-mail: afkurin@mail.ru

*В окончательной редакции 28 февраля 2005 г.*

Описано явление устойчивого движения зарядов в пучности электрического поля стоячей волны. Выводы основаны на анализе уравнения Хилла, полученного из уравнений движения зарядов. Для устойчивых колебаний определены области значений параметров, характеризующих поле и заряды. Показано, что частицы способны ускоряться до релятивистских скоростей, оставаясь в пучности.

После основополагающих работ [1,2] при анализе взаимодействия заряженных частиц с пространственно-неоднородными высокочастотными электромагнитными полями широко используется усреднение по быстрым колебаниям поля в уравнениях движения зарядов, т.е. движение рассматривается под действием усредненной силы Лоренца. Однако в сильных полях время пролета частиц через область неоднородности поля соизмеримо с периодом колебаний поля (малый угол пролета) и усреднение становится некорректным. Если снять ограничение на амплитуду электрического поля, то обнаруживаются новые резонансные и нерезонансные режимы взаимодействия; в случае циркулярно поляризованных плоских волн они описаны в [3–5]. Для линейно поляризованной стоячей волны без использования усреднения приходим к уравнениям движения, в которых сила Лоренца зависит от времени. Колебания частиц являются параметрическими. Вместо возникающего при усреднении квазипотенциального барьера [1,2] для

частиц имеем барьер, зависящий от времени и, следовательно, от момента влета заряда в поле. Движение зарядов в сильном поле является релятивистским.

В настоящей работе рассматривается один из параметрических эффектов: устойчивые колебания зарядов в пучности электрического поля стоячей электромагнитной волны. Колебания описываются уравнением Хилла. Имеются области устойчивости для параметров, характеризующих поле и движущиеся заряды. Совершая колебания в пучности, заряды могут ускоряться электрическим полем до релятивистских скоростей. Этот режим ускорения в стоячей электромагнитной волне, по-видимому, является наиболее эффективным. Эффективность других режимов ускорения обсуждалась в работе [6]. Излучение ускоренных частиц и их радиационное торможение в настоящей работе не рассматриваются. Все результаты теории проверены численным решением точных уравнений движения.

Описанный эффект подобен известному явлению устойчивых колебаний в верхнем положении равновесия маятника с вибрирующим подвесом (эффект Боголюбова–Капицы).

Рассмотрим движение заряда —  $e$  в высокочастотном линейно поляризованном стоячем поле, образованном однородными волнами, бегущими вдоль оси  $z$  декартовой системы координат  $x, y, z$ . Векторный потенциал стоячей волны равен

$$\mathbf{A} = \frac{E_0}{k} \cos(\omega t) \sin(hz)(1, 0, 0), \quad (1)$$

где  $E_0$  — амплитуда электрического поля  $\mathbf{E}$ ,  $h = nk$ ,  $k = \omega/c$ ,  $n$  — показатель преломления немагнитной среды. Релятивистское уравнение для импульса  $\mathbf{p}$  запишется по проекциям в виде

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{e}{c} \frac{dA_x}{dt}, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = -\frac{enE_0}{c} v_x \cos(\omega t) \cos(hz), \quad (2)$$

где  $v_x$  — проекция скорости на ось  $x$ . Интегрируя уравнения (2) для  $p_x, p_y$  с начальными условиями  $p_x(t_0) = p_{x0}, p_y(t_0) = p_{y0}, z(t_0) = z_0$ , с учетом (1) получаем

$$p_x = p_{x0} + \frac{eE_0}{\omega} [\cos(\omega t) \sin(hz) - \cos(\omega t_0) \sin(hz_0)], \quad p_y = p_{y0}. \quad (3)$$

Используя эти выражения, а также формулы  $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p}/W$ ,  $dW/dt = -(\mathbf{v}, \mathbf{E})$ , из уравнения (2) для  $p_z$  получаем записанное в безразмерном виде уравнение для координаты  $Z = hz$

$$\ddot{Z} = \Omega^2 (n^{-2} \dot{Z} \sin T \sin Z - \cos T \cos Z) (q_x + \cos T \sin Z). \quad (4)$$

Здесь  $T = \omega t$ ,  $\Omega = n\varepsilon/\gamma$  — отношение гирочастоты в магнитном поле  $nE_0$  стоячей волны к частоте поля  $\omega$ ,  $\varepsilon = eE_0/(m_0 c \omega)$  — параметр электрического поля,  $m_0$  — масса покоя заряда,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — релятивистский фактор,  $v = |\mathbf{v}|$ . Постоянный параметр в (4)

$$q_x = \frac{\gamma_0 \beta_{x0}}{\varepsilon} - \sin Z_0 \cos T_0 \quad (5)$$

выражается через начальные значения (при  $T = T_0 = \omega t_0$ ) релятивистского фактора  $\gamma_0$ , координаты  $Z_0 = hz_0$ , составляющей скорости  $v_{x0}$  по оси  $x$  ( $\beta_{x0} = v_{x0}/c$ ). Точки над  $Z$  означают дифференцирование по  $T$ .

Аналогично из выражений (3) получаем уравнения для координат  $X = h(x - x_0)$ ,  $Y = h(y - y_0)$ :

$$\dot{X} = \Omega (q_x + \cos T \sin Z), \quad \dot{Y} = q_y \Omega, \quad (6)$$

где  $q_y = \gamma_0 \beta_{y0}/\varepsilon$ ,  $\beta_{y0} = v_{y0}/c$  ( $v_{y0}$  — начальное значение  $y$ -составляющей скорости).

Наконец, для зависящей от  $T$  функции  $\Omega$ , обратно пропорциональной энергии частицы, после дифференцирования  $\Omega$  по  $T$  с учетом (3) получаем уравнение

$$\dot{\Omega} = n^{-2} \Omega^3 (q_x + \cos T \sin Z) \sin T \sin Z. \quad (7)$$

Система уравнений (4), (6), (7) интегрируется с начальными условиями  $T = T_0$ ,  $Z = Z_0$ ,  $X = Y = 0$ ,  $\Omega = \Omega_0 = n\varepsilon/\gamma_0$ .

В системе (4), (6), (7) сделаем замену  $Z_1 = Z - \pi/2$ , помещая начало координат в пучность электрического поля. Система является нелинейной по  $Z$ . Учитывая аппроксимации  $\sin Z \approx 1$ ,  $\cos Z \approx -Z_1$ , справедливые для пучности электрического поля, линейризуем систему по  $Z_1$ . В результате получаем линейную по координатам систему

уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{Z}_1 &= \Omega^2(Z_1 \cos T + n^{-2}\dot{Z}_1 \sin T)(q_x + \cos T), \quad \dot{X} = \Omega(q_x + \cos T), \\ \dot{Y} &= q_y \Omega, \quad \dot{\Omega} = n^{-2}\Omega^3 \sin T(q_x + \cos T),\end{aligned}\quad (8)$$

где  $q_x = n\beta_{x0}/\Omega_0 - \cos T_0$ . Начальными условиями являются:  $T = T_0$ ,  $Z_1 = X = Y = 0$ ,  $\Omega = \Omega_0$ .

Интегрирование уравнения для  $\Omega$  в (8) дает

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{1 - \beta_{x0}^2}{\Omega_0^2} + \frac{(q_x + \cos T)^2}{n^2}. \quad (9)$$

Подставляя это выражение в уравнение для  $Z_1$  (8), получаем линейное уравнение с периодическими коэффициентами

$$\ddot{Z}_1 + p_1(T)\dot{Z}_1 + p_2(T)Z_1 = 0, \quad (10)$$

где

$$p_1(T) = -n^{-2} \sin T(q_x + \cos T)\Omega^2, \quad p_2(T) = -\cos T(q_x + \cos T)\Omega^2.$$

Известная замена

$$Z_1 = Z_2 e^{-0.5 \int p_1 dT} = \frac{Z_2}{\sqrt[4]{a + (q_x + \cos T)^2}}, \quad (11)$$

где  $a = n^2(1 - \beta_{x0}^2)/\Omega_0^2$ , позволяет исключить первую производную в (10). В результате для  $Z_2$  получаем уравнение Хилла

$$\ddot{Z}_2 + p(T)Z_2 = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}p(T) &= p_2(T) - \frac{1}{4}p_1^2(T) - \frac{1}{2}\dot{p}_1(T) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1 - 2n^2)(q_x + \cos T) \cos T - \sin^2 T}{a + (q_x + \cos T)^2} + \frac{3}{4} \frac{(q_x + \cos T)^2 \sin^2 T}{4[a + (q_x + \cos T)^2]^2}\end{aligned}\quad (13)$$

является периодической функцией аргумента  $T$  и содержит три параметра  $n$ ,  $a$ ,  $q_x$ .

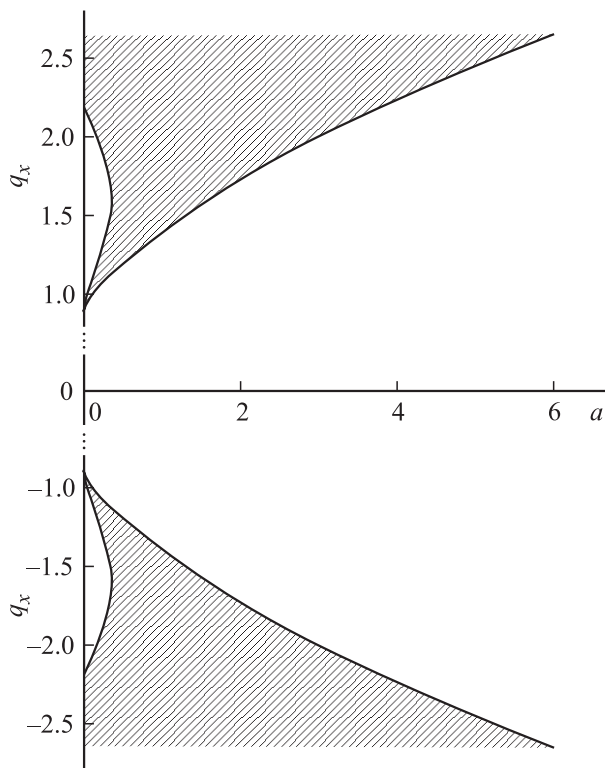


Рис. 1.

Устойчивость тривиального решения уравнения (12) определялась известным способом [7] с помощью характеристической постоянной Ляпунова  $A$  этого уравнения. Необходимые для вычисления  $A$  значения при  $T = 2\pi$  функций, образующих фундаментальную систему решений уравнения (12), находились численным методом на ЭВМ. Для  $n = 1$ ,  $a \geq 0$  на рис. 1 построена диаграмма устойчивости тривиального решения уравнения (12), а именно: координаты точек в заштрихованных областях — это значения параметров  $a = (1 - \beta_{x0}^2)\gamma_0^2/\varepsilon^2$ ,  $q_x = \beta_{x0}\gamma_0/\varepsilon - \cos T_0$ , при которых имеет место устойчивость. На рис. 2 показана часть диаграммы при малых  $a$ . Уравнение (12) не меняется при

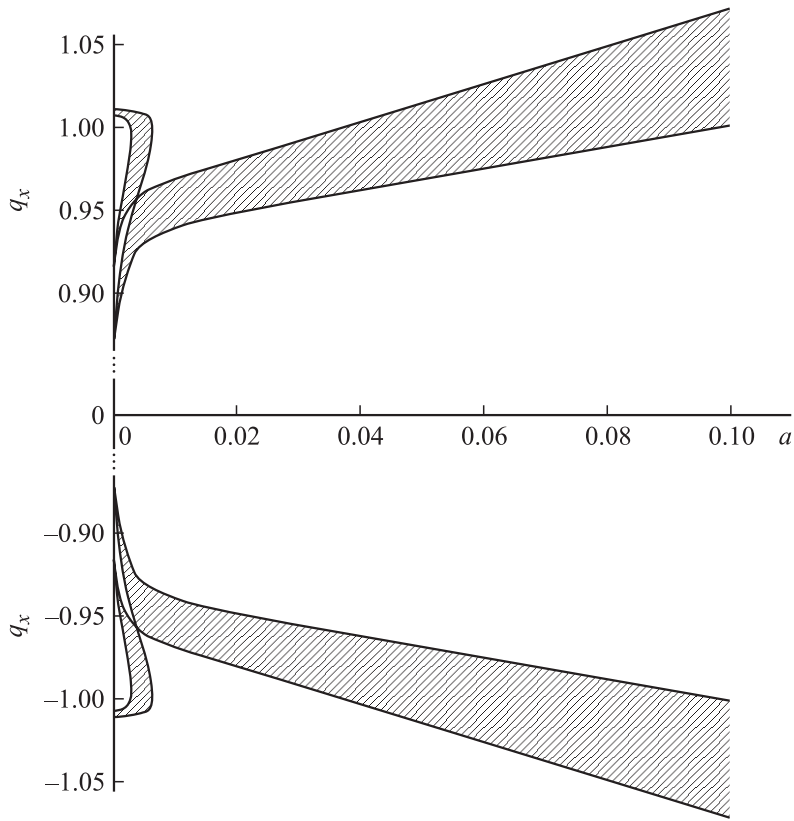


Рис. 2.

замене в (12), (13)  $q_x$  на  $-q_x$  и  $T$  на  $T + \pi$ . Поэтому области устойчивости расположены симметрично относительно оси  $a$ . Всего имеем четыре области. Если считать, что первоначально (при  $T = T_0$ ) частица имела наибольшую составляющую скорости по  $x$ , то  $(1 - \beta_{x0}^2)\gamma_0^2 \simeq 1$  и, следовательно,  $a \simeq 1/\varepsilon^2$ . Значит, малым значениям  $a$  физически соответствуют сильные поля (большие значения  $\varepsilon$ ).

Покажем, как пользоваться диаграммой на рис. 1, 2. Два параметра  $a$ ,  $q_x$  выражаются через четыре имеющих физический смысл пара-

метра  $\beta_{x0}$ ,  $\gamma_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $T_0$ . Поскольку  $|\cos T_0| \leq 1$ , то  $q_x$  должен удовлетворять неравенствам

$$\frac{\beta_{x0}\gamma_0}{\varepsilon} - 1 \leq q_x \leq \frac{\beta_{x0}\gamma_0}{\varepsilon} + 1. \quad (14)$$

Задавая  $x$ -составляющей начальной скорости  $\beta_{x0}$  и начальной энергией частицы  $\gamma_0$ , а также напряженностью электрического поля  $\varepsilon$ , вычисляем граничные значения в (14) и  $a$ . Затем, отмечая для данного  $a$  на диаграмме интервал (14), определяем в нижней (при  $q_x < 0$ ) и верхней (при  $q_x > 0$ ) заштрихованных областях интервалы значений  $q_x$ , попадающих в интервал (14):

$$q_{x,\min}^{(1,2)} \leq q_x \leq q_{x,\max}^{(1,2)}, \quad (15)$$

причем граничные значения  $q_{x,\min}^{(1)}$ ,  $q_{x,\max}^{(1)}$  для нижней области и  $q_{x,\min}^{(2)}$ ,  $q_{x,\max}^{(2)}$  для верхней области могут находиться как внутри областей устойчивости, так и на границах этих областей. Далее, если в (15) подставить выражение для  $q_x$ , то получим тригонометрические неравенства

$$\frac{\beta_{x0}\gamma_0}{\varepsilon} - q_{x,\max}^{(1,2)} \leq \cos T_0 \leq \frac{\beta_{x0}\gamma_0}{\varepsilon} - q_{x,\min}^{(1,2)}, \quad (16)$$

из которых следуют интервалы углов влета  $T_0$  с устойчивым движением по  $z$ .

Заметим, что если оба граничных значения в (14) приходятся на одну из заштрихованных областей рис. 1, 2, то  $q_{x,\min}$ ,  $q_{x,\max}$  в (15) совпадают с этими значениями, и из (16) получаем неравенства  $-1 \leq \cos T_0 \leq 1$ , указывающие на устойчивое движение при всех углах влета. Например, сказанное имеет место, если взять  $a = (1 - \beta_{x0}^2)\gamma_0^2/\varepsilon^2 = 1$ ,  $\beta_{x0}\gamma_0/\varepsilon = \pm 5/2$ , что соответствует значениям  $\beta_{x0} = \pm 5/\sqrt{29}$  и  $\varepsilon/\gamma_0 = 2/\sqrt{29}$ . Если же оба граничных значения в (14) приходятся на незаштрихованные области рис. 1, 2 и при этом в интервале (14) отсутствуют точки из заштрихованных областей, то устойчивое движение невозможно ни при каких  $T_0$ . Это имеет место, например, при  $a = 2$ ,  $\beta_{x0}\gamma_0/\varepsilon = \pm 1/2$ , что соответствует значениям  $\beta_{x0} = \pm 1/3$ ,  $\varepsilon/\gamma_0 = 2/3$ .

При  $\beta_{x0} = 0$  из (14) получаем  $-1 \leq q_x \leq 1$ , и из диаграммы на рис. 2 следует, что устойчивое движение возможно при  $a \leq 0.095$ , т.е. когда  $\varepsilon/\gamma_0 \geq 3, 2$ .

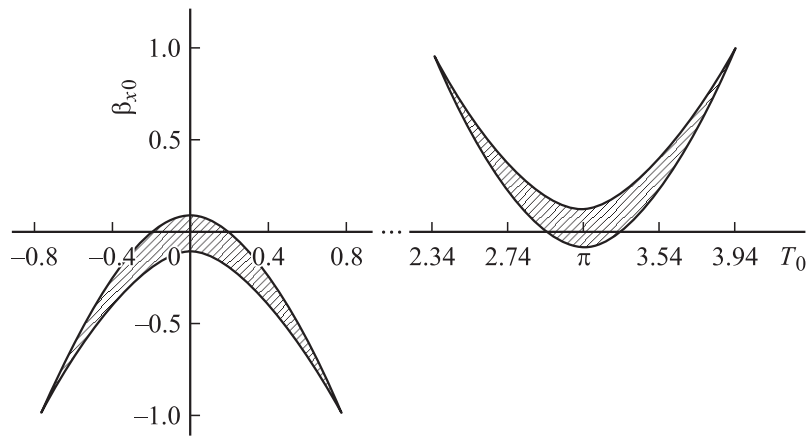


Рис. 3.

На рис. 3 в качестве примера построены с помощью (14)–(16) и рис. 2 периодически повторяющиеся по  $T_0$  области устойчивости (заштрихованы) для параметров  $\beta_{x0}$ ,  $T_0$  при  $\varepsilon/\gamma_0 = 4$ . Как видно, в данном случае ограниченное движение в пучности электрического поля возможно для частиц, моменты влета которых находятся в некоторых интервалах вблизи значений  $T_0 = s\pi$  ( $s = 0, 1, \dots$ ).

Для оценок длины волны  $\lambda$  и напряженности электрического поля  $E_0$  в случае электрона может быть полезной формула

$$\varepsilon = 3.1 \cdot 10^{-2} E_0 \left[ \frac{\text{kV}}{\text{cm}} \right] \lambda [\text{m}].$$

Из (9) получаем выражение для энергии частицы, приобретаемой в электрическом поле стоячей волны при движении в пучности этого поля:

$$\gamma = \gamma_0 \left\{ 1 - \beta_{x0}^2 + \left[ \beta_{x0} + \frac{\varepsilon}{\gamma_0} (\cos T - \cos T_0) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Отсюда видно, что заряды, оставаясь в пучности (в максимуме электрического поля), ускоряются периодически в соответствии с колебаниями поля во времени. Причем наибольшую энергию при прочих равных условиях приобретают частицы с моментами влета  $T_0 = s\pi$



( $s = 0, 1, \dots$ ), т.е. когда электрическое поле принимает нулевое значение, поскольку для этих частиц электрическая сила сохраняет свое направление наибольшее время, равное половине периода колебаний поля  $\pi$ , после чего ориентация силы меняется на противоположную и начинается торможение частиц. Энергия ускоренных частиц может быть значительной. Так, если  $\varepsilon/\gamma_0 \gg 1$  (сильное поле), то  $\gamma \simeq 2\varepsilon \gg 1$ .

Из выражений (8) для составляющих  $X$ ,  $Y$  скорости частицы получаем

$$\beta_x = \frac{v_x}{c} = \frac{\beta_{x0}\gamma_0 + \varepsilon(\cos T - \cos T_0)}{\gamma}, \quad \beta_y = \frac{v_y}{c} = \frac{\beta_{y0}\gamma_0}{\gamma},$$

где  $\gamma$  определяется формулой (17), откуда следует, как и ожидалось, что ускорение происходит преимущественно в направлении электрического поля, т.е. по оси  $x$ . Совершая колебания, заряды дрейфуют в плоскости  $xOy$ .

## Список литературы

- [1] Гапонов А.В., Миллер М.А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 1. С. 242–243.
- [2] Миллер М.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1. № 3. С. 110–123.
- [3] Курин А.Ф., Курин Е.А. // ЖТФ. 1993. Т. 63. В. 7. С. 55–63.
- [4] Курин А.Ф. // ЖТФ. 1994. Т. 64. В. 8. С. 14–23.
- [5] Курин А.Ф. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46. № 1. С. 52–71.
- [6] Аскаръян Г.А. // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. № 2. С. 619–621.
- [7] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.