01;03

Аналитическое решение задачи о скачке концентрации при испарении бинарной газовой смеси

© *А.В. Латышев, А.А. Юшканов*

Московский государственный областной университет
E-mail: yushkanov@mtu-net.ru

Поступило в Редакцию 18 июня 2004 г.

Получено аналитическое решение задачи о скачке концентрации при испарении бинарной газовой смеси с плоской поверхности.

В последнее время наблюдается растущий интерес к задачам, связанным с учетом влияния коэффициента испарения на термодиффузионные процессы в аэродисперсных системах [1,2]. Отметим, что данное явление, связанное со скачком концентрации на границе раздела газ–конденсированное тело рассматривалось в несколько другой постановке и ранее [3,4]. Расчет скачка концентрации в случае бинарной газовой смеси проводился ранее приближенными методами [5,6]. До сих пор отсутствовало аналитическое решение соответствующей задачи. Подобное аналитическое решение было получено ранее только для случая однокомпонентного газа [7]. Однако для ряда практических приложений этого недостаточно.

В ряде работ используются различные варианты граничных условий при испарении в бинарную газовую смесь [1–4]. При этом в этих граничных условиях представлена разная зависимость от коэффициента испарения. Подобное положение вызывает необходимость построения точной количественной теории кинетических коэффициентов, которая дала бы корректное описание зависимости этих коэффициентов от коэффициента испарения.

В настоящей работе рассматривается процесс испарения с плоской поверхности в бинарную газовую смесь. При этом предполагается, что концентрация испаряющегося компонента смеси n_1 много меньше концентрации неиспаряющегося компонента n_2: $n_1 \ll n_2$. Отметим, что для большинства наиболее важных приложений это условие выполняется.

Уравнение Больцмана для бинарной газовой смеси имеет вид [8]

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_i} = J_{ii} + J_{ij}, \qquad i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{v}_i$ — координата и скорость молекул i-го компонента смеси, f_i — функция распределения i-го компонента, J_{ii} и J_{ij} — интегралы столкновений молекул i-го компонента между собой и с молекулами j-го компонента. Они имеют вид

$$J_{ij} = \int v_{ij}(f'_i f'_j - f_i f_j)\, d\sigma_{ij} d^3 p_j. \tag{2}$$

Здесь f'_i — функция распределения i-го компонента после столкновения, p_j — импульс j-го компонента, $d\sigma_{ij}$ — дифференциальное сечение рассеяния молекул i-го и j-го компонентов, $v_{ij} = |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|$.

Отметим, что $J_{11} \sim n_1^2$, а $J_{12} \sim n_1 n_2$ (так как $f_i \sim n_i$).

У нас имеется малый параметр $\varepsilon = n_1/n_2 \ll 1$. Очевидно, что $|J_{11}|/|J_{12}| \sim \varepsilon$. Поэтому в первом приближении по ε величиной J_{11} можно пренебречь по сравнению с J_{12}. Кроме того, в этом приближении по ε воздействием первого компонента на функцию распределения второго можно пренебречь. Поэтому в условиях рассматриваемой задачи функцию распределения второго компонента газовой смеси можно считать равновесной максвелловской со средней скоростью $\mathbf{U}_2 = 0$ и постоянными температурой T и концентрацией n_2.

Величину J_{12} можно аппроксимировать кинетической моделью типа Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК) [9]. Тогда с учетом (1) и (2) кинетическое уравнение для первого компонента примет вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} = \nu_1 (f_1^0 - f_1), \tag{3}$$

где

$$f_1^0 = n_1 \left(\frac{\beta_1}{\pi}\right)^{3/2} \exp(-\beta_1 v_1^2), \qquad \beta_1 = \frac{m_1}{2kT}$$

— равновесная максвелловская функция распределения для первого компонента, k — постоянная Больцмана, ν_1 — эффективная частота столкновений для молекул первого компонента, n_1 — локальная концентрация молекул первого компонента

$$n_1 = \int f_1 d^3 v_1.$$

Можно показать, что эффективная частота столкновений ν_1 связана с коэффициентом диффузии D_{12} следующим соотношением:

$$D_{12} = \frac{kT}{\nu_1 m_1}.$$

Возьмем декартову систему координат с центром на поверхности, с которой происходит испарение. Ось x_1 проведем перпендикулярно поверхности. При испарении с поверхности вдали от поверхности существует постоянный градиент концентрации первого компонента $g_n^1 = \left(\frac{dn_1}{dx_1}\right)_\infty$. Будем считать испарение слабым, т. е. предположим, что относительное изменение концентрации первого компонента на длине свободного пробега молекул l много меньше единицы: $\frac{l}{n_{1s}}|g_n^1| \ll 1$. В этих условиях задача допускает линеаризацию. Функцию распределения молекул первого компонента f_1 можно представить в виде

$$f_1 = f_s(1+\psi), \qquad f_s = n_{1s}\left(\frac{\beta_1}{\pi}\right)^{3/2}\exp(-\beta_1 v_1^2). \tag{4}$$

Здесь n_{1s} — концентрация насыщенного газа (первого компонента) на поверхности испарения, соответствующая температуре поверхности T. Очевидно, $\psi = \psi(x_1, \mathbf{v}_1)$. Учитывая стационарность задачи и соотношение (4), уравнение (3) можно переписать в виде

$$v_{1x}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \nu_1\left(\frac{\delta n_1}{n_{1s}} - \psi\right), \qquad \delta n_1(x) = n_1(x) - n_{1s}. \tag{5}$$

Здесь

$$\frac{\delta n_1(x)}{n_{1s}} = \left(\frac{\beta_1}{\pi}\right)^{3/2}\int \exp(-\beta_1 v^2)\psi(x, v_{1x})d^3v_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\psi(x,\mu')d\mu', \quad \mu = C_{1x} = \sqrt{\beta_1}\,v_{1x}.$$

Рассмотрим граничное условие на поверхности испарения для молекул первого компонента, учитывающее влияние свойств поверхности путем введения коэффициента испарения α [10–12]:

$$f_1(0, \mathbf{v}_1) = \alpha f_s(n_{1s}, v_1) + (1-\alpha)f_0(n_0, v_1), \quad v_{1x} > 0. \tag{6}$$

Здесь
$$f_0 = n_0\left(\frac{\beta_1}{\pi}\right)^{3/2}\exp(-\beta_1 v_1^2).$$
Величина n_0 определяется из условия непротекания для молекул, отразившихся от поверхности без конденсации на ней (вероятность такого процесса равна $1-\alpha$)
$$(1-\alpha)\int v_{1x}\left[f_0(n_0, v_1)\theta_+(v_{1x}) + f(0, \mathbf{v}_1)\theta_+(-v_{1x})\right]d^3v_1 = 0,$$
где $\theta_+(x)$ — функция Хэвисайда, $\theta_+(x) = 1$, $x > 0$; $\theta_+(x) = 0$, $x < 0$.

Учитывая соотношение (4), граничное условие (6) можно переписать в виде
$$\psi(0, \mathbf{v}_1) = (1-\alpha)\,\frac{n_0 - n_{1s}}{n_{1s}}, \qquad v_{1x} > 0. \tag{7}$$
Из вида уравнения (5) и граничного условия (7) следует, что функция ψ зависит только от x-компонента скорости $\mathbf{v}$, т. е. $\psi = \psi(x, v_{1x})$. После введения безразмерной координаты $x = x_1\nu_1\sqrt{\beta_1}$ и безразмерной скорости $\mu = \sqrt{\beta_1}\,v_{1x}$ уравнение (5) преобразуется к виду
$$\mu\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mu'^2)\psi(x, \mu')d\mu'. \tag{8}$$
Граничное условие на стенке (7) перепишется в виде
$$\psi(0, \mu) = (1-\alpha)a, \quad a = \frac{n_0 - n_{1s}}{n_{1s}}, \quad \mu > 0. \tag{9}$$

Вдали от поверхности (вне слоя Кнудсена толщиной порядка длины свободного пробега молекул) функция ψ имеет вид (распределение Чепмена–Энскога [8])
$$\psi_0 = G_n(x-\mu) + \varepsilon_n,\ \ G_n = \left(\frac{dn_1}{dx}\right)_\infty \frac{1}{n_1\nu_1\sqrt{\beta_1}},\ \ \varepsilon_n = \frac{n_1(0) - n_{1s}}{n_{1s}}. \tag{10}$$

Здесь $\varepsilon_n = \frac{\delta n_1(0)}{n_{1s}}$ — относительный скачок концентрации молекул первого компонента смеси, $n_1(0)$ — концентрация молекул первого компонента, экстраполированная вплоть до поверхности из решения гидродинамических уравнений, $\delta n_1(0) = n_1(0) - n_{1s}$.

Величина a находится из условия непротекания

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\mu\left[a\theta_+(\mu) + \psi(0,\mu)\theta_+(-\mu)\right]d\mu = 0,$$

откуда получаем уравнение

$$a\int_{0}^{\infty} \exp(-\mu^2)\mu d\mu + \int_{-\infty}^{0} \exp(-\mu^2)\mu\psi(0,\mu)d\mu = 0.$$

Заменяя во втором интеграле функцию ψ на асимптотическую ψ_{as}, получим

$$a = \frac{n_0 - n_{1s}}{n_{1s}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}G_n.$$

Будем искать решение задачи (8)–(10) в виде

$$\psi_\eta(x,\mu) = \exp\Big(-\frac{x}{\eta}\Big)\Phi(\eta,\mu).$$

Получим характеристическое уравнение

$$(\eta-\mu)\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu^2)\Phi(\eta,\mu)d\mu = 1.$$

При $\eta \in (-\infty, +\infty)$ найдем (см. [13]) собственные функции характеристического уравнения

$$\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\delta(\eta-\mu).$$

Здесь $\lambda(z)$ — дисперсионная функция Черчиньяни,

$$\lambda(z) = 1 + z\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\tau^2)d\tau}{\tau - z}.$$

Будем искать решение задачи (8)–(10) в виде разложения по собственным функциям $\Phi(\eta,\mu)$:

$$\psi(x,\mu)=\varepsilon_n+G_n(x-\mu)+\int\limits_0^\infty \exp\Big(-\frac{x}{\eta}\Big)\Phi(\eta,\mu)A(\eta)d\eta. \qquad (11)$$

Здесь $A(\eta)$ — неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра.

Подставляя в разложение (11) собственные функции, получим сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [14]

$$(1-\alpha)a=\varepsilon_n-G_n\mu+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\eta A(\eta)d\eta}{\eta-\mu}+\exp(\mu^2)\lambda(\mu)A(\mu)=0,$$
$$0<\mu<1.$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\frac{\eta A(\eta)d\eta}{\eta-z}.$$

С помощью граничных значений дисперсионной функции $\lambda(z)$ и вспомогательной функции $N(z)$ на действительной полуоси сведем сингулярное уравнение к неоднородной краевой задаче [15]

$$\lambda^+(\mu)\big[N^+(\mu)+\varepsilon_n-G_n\mu-(1-\alpha)a\big]$$
$$=\lambda^-(\mu)\big[N^-(\mu)+\varepsilon_n-G_n\mu-(1-\alpha)a\big],\quad \mu>0.$$

Рассмотрим соответствующую однородную задачу

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)}=\frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)},\quad \mu>0.$$

Ее решение [15] имеет вид

$$X(z)=\frac{1}{z}\exp V(z),\qquad V(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\zeta(\tau)d\tau}{\tau-z},$$

$$\zeta(\tau)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\,\tau\exp(-\tau^2)}.$$

С помощью однородной задачи неоднородную сведем к задаче определения аналитической функции по ее нулевому скачку на разрезе:

$$X^+(\mu)\left[N^+(\mu)+\varepsilon_n-G_n\mu-(1-\alpha)a\right]$$
$$=X^-(\mu)\left[N^-(\mu)+\varepsilon_n-G_n\mu-(1-\alpha)a\right], \quad \mu>0.$$

Общее решение этой задачи имеет вид

$$N(z)=-\varepsilon_n+G_nz+(1-\alpha)a+\frac{d_0}{X(z)},$$

где d_0 — произвольная постоянная.

Из условия $N(\infty)=0$ находим, что $d_0=-G_n$, $\varepsilon_n=\frac{1}{2}C_n(\alpha)G_n$, где

$$C_n(\alpha)=2\left[\sqrt{\pi}\,\frac{1-\alpha}{\alpha}+V_1\right], \quad V_1=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \xi(\tau)d\tau=1.016191.$$

Переходя к размерным величинам, отсюда получаем

$$\delta n_1(0)=C_n(\alpha)\sqrt{\beta_1}D_{12}g_n^1, \qquad \delta n_1(0)=n_1(0)-n_{1s}. \tag{12}$$

В большинстве работ используется граничное условие в виде, эквивалентном (12) [3,5,6]. Это условие учитывает поправки по числу Кнудсена к гидродинамическому описанию процессов испарения. В то же время в работах [1,2,11] используется граничное условие на скачок концентрации типа (12), но записанное в другом виде, когда левая и правая части условия (12) меняются местами, т. е.

$$D_{12}g_n^1=\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}K_n(\alpha)\delta n_1(0), \quad K_n(\alpha)=\frac{\alpha}{2[\sqrt{\pi}+(V_1-\sqrt{\pi})\alpha]}. \tag{13}$$

Для случая $n_1\ll n_2$ граничное условие (13) эквивалентно по виду граничному условию, используемому в [1,2]. В [1,2,11] (см. также [12]) приводится следующее выражение для коэффициента $K_n(\alpha)$ (обозначим его $K_n^1(\alpha)$)

$$K_n^1(\alpha)=\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}. \tag{14}$$

Отметим, что граничное условие (13) с коэффициентом (14) называют граничным условием Герца–Кнудсена [11].

Сравним результат полученного аналитического решения с граничным условием Герца–Кнудсена. При $\alpha = 1$, согласно условию Герца–Кнудсена (14), имеем: $K_n^1(1) = 0.282095$, в то время как, согласно аналитическому решению (13), $K_n(1) = 0.492044$.

При $\alpha \to 0$ $K_n(\alpha) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}$. Таким образом, при малых коэффициентах испарения величины $K_n(\alpha)$ и $K_n^1(\alpha)$ совпадают.

Работа выполнена при частичной (Латышев А.В.) финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00281).

Список литературы

[1] *Яламов Г.Ю.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. В. 2. С. 41–45.
[2] *Яламов Ю.И., Хасанов А.С.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. В. 7. С. 13–18.
[3] *Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л.* Избранные вопросы физики аэрозолей. М.: МПУ, 1992. 297 с.
[4] *Яламов Ю.И., Зенкина О.Н., Баринова М.Ф.* // ИФЖ. 2000. Т. 73. № 6. С. 1295–1305.
[5] *Алехин Е.И., Яламов Ю.И.* // ТВТ. 1996. Т. 34. В. 3. С. 487–491.
[6] *Алехин Е.И., Яламов Ю.И.* Математические основы решения граничных задач кинетической теории многокомпонентных газов вблизи конденсированной фазы. М.: МОПИ, 1991. 150 с.
[7] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ИФЖ. 2000. Т. 73. № 3. С. 542–549.
[8] *Силин В.П.* Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971. 332 с.
[9] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
[10] *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
[11] *Козырев А.В., Ситников А.Г.* // УФН. 2001. Т. 171. № 7. С. 765–774.
[12] *Хирс Д., Паунд Г.* Испарение и конденсация. М.: Металлургия, 1966. 196 с.
[13] *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
[14] *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
[15] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Аналитическое решение граничных задач кинетической теории. М.: МГОУ, 2004. 286 с.