

01

## Реконструкция уравнений систем с двумя временами запаздывания по временным рядам

© В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовское отделение Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 19 февраля 2004 г.

Предложен метод восстановления по временным рядам уравнений систем с запаздывающей обратной связью, характеризуемых наличием двух различных времен задержки. Работоспособность метода продемонстрирована на примере обобщенного уравнения Маккея—Гласса.

1. Системы с запаздыванием, т. е. системы, динамика которых определяется не только текущим состоянием, но и состояниями в предыдущие моменты времени, широко распространены в природе [1]. Для описания этих систем обычно используются модели в виде дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Такие модели успешно применяются во многих разделах физики, биологии и химии [2–6]. Зачастую при моделировании систем с запаздыванием требуется учесть зависимость текущего состояния от нескольких предыдущих состояний, т. е. использовать модель с несколькими временами запаздывания [7–9]. В последние годы было предложено несколько различных подходов, позволяющих восстановить модельные уравнения систем с запаздыванием по временным рядам [10–19]. Однако практически все предложенные методы применялись для реконструкции дифференциальных уравнений с одним временем запаздывания. Распространение этих методов на случай систем с двумя и более временами запаздывания не всегда оказывается возможным. В данной работе мы развиваем предложенные нами ранее методы реконструкции систем с запаздывающей обратной связью по их хаотическим временным реализациям [16,17] на случай систем с запаздыванием, для которых характерно наличие двух различных времен задержки.

2. Рассмотрим систему с запаздыванием, описываемую дифференциальным уравнением первого порядка с двумя временами запаздывания  $\tau_1$  и  $\tau_2$ :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)). \quad (1)$$

Для восстановления по наблюдаемой реализации  $x(t)$  времен задержки  $\tau_1$  и  $\tau_2$  воспользуемся методом, предложенным нами в [16], где было показано, что во временной реализации систем с запаздыванием вида  $\dot{x}(t) = G(x(t), x(t - \tau))$  практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на  $\tau$ . Покажем, что этот метод, опирающийся на закономерности расположения экстремумов во временных реализациях систем с запаздыванием, может быть применен и к системам вида (1). Продифференцировав уравнение (1) по времени, получим

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial F}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial x(t - \tau_1)} \dot{x}(t - \tau_1) + \frac{\partial F}{\partial x(t - \tau_2)} \dot{x}(t - \tau_2). \quad (2)$$

Так как экстремумы временной реализации  $x(t)$  уравнения (1) в типичном случае являются квадратичными, то в экстремальных точках  $\dot{x}(t) = 0$ ,  $\ddot{x}(t) \neq 0$ . Следовательно, если  $\dot{x}(t) = 0$ , должно выполняться условие

$$a\dot{x}(t - \tau_1) + b\dot{x}(t - \tau_2) \neq 0, \quad (3)$$

где

$$a = \partial F(x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)) / \partial x(t - \tau_1)$$

и

$$b = \partial F(x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)) / \partial x(t - \tau_2).$$

Условие (3) выполняется, если  $\dot{x}(t - \tau_1) \neq 0$  или/и  $\dot{x}(t - \tau_2) \neq 0$ . Это означает, что производные  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau_1)$  или  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau_2)$  одновременно в нуль не обращаются, т.е. на удалении  $\tau_1$  или  $\tau_2$  от квадратичного экстремума не должно быть другого экстремума. В результате число экстремумов, разделенных интервалами времени  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , будет существенно меньше, чем число экстремумов, разделенных другими значениями времени  $\tau$ . Тогда для нахождения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  нужно выделить экстремумы в исходной реализации  $x(t)$ , а затем для различных значений времени  $\tau$  определить число  $N$  пар экстремумов во временной реализации, удаленных друг от друга на  $\tau$ , и построить зависимость  $N(\tau)$ . График  $N(\tau)$  будет демонстрировать ярко выраженные минимумы при  $\tau = \tau_1$  и  $\tau = \tau_2$ , соответствующих временам запаздывания. Однако эти

минимумы менее глубокие, чем в случае систем с одним временем запаздывания, так как только один из членов уравнения (3) обязательно отличен от нуля.

Метод реконструкции по временному ряду остальных характеристик системы с двумя временами задержки проиллюстрируем на примере системы с запаздыванием вида

$$\varepsilon_0 \dot{x}(t) = -x(t) + f_1(x(t - \tau_1)) + f_2(x(t - \tau_2)), \quad (4)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — нелинейные функции, а  $\varepsilon_0$  — параметр, характеризующий инерционность системы. Дифференцирование уравнения (4) по  $t$  дает

$$\varepsilon_0 \ddot{x}(t) = -\dot{x}(t) + \frac{\partial f_1(x(t - \tau_1))}{\partial x(t - \tau_1)} \dot{x}(t - \tau_1) + \frac{\partial f_2(x(t - \tau_2))}{\partial x(t - \tau_2)} \dot{x}(t - \tau_2). \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует, что если выполняется условие

$$\dot{x}(t - \tau_1) = \dot{x}(t - \tau_2) = 0, \quad (6)$$

то  $\varepsilon_0 \ddot{x}(t) = -\dot{x}(t)$ . Откуда получаем формулу для параметра инерционности

$$\varepsilon_0 = -\frac{\dot{x}(t)}{\ddot{x}(t)}. \quad (7)$$

Таким образом, параметр  $\varepsilon_0$  можно оценить, если найти точки реализации  $x(t)$ , для которых выполняется условие (6), определить в этих точках первую и вторую производные, вычислить значения  $\varepsilon_0$  по формуле (7) и найти их среднее.

Для восстановления нелинейных функций  $f_1$  и  $f_2$  спроецируем траекторию, задаваемую уравнением (4), из бесконечномерного фазового пространства системы с запаздыванием в трехмерное пространство  $(\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2))$ . При этом множество точек, посещаемых системой в этом пространстве, располагается на двумерной поверхности, так как согласно (4):

$$\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t) = f_1(x(t - \tau_1)) + f_2(x(t - \tau_2)). \quad (8)$$

Сечение этой поверхности плоскостью  $x(t - \tau_2) = \text{const}$  позволяет с точностью до константы определить вид нелинейной функции  $f_1$ , так как точки сечения удовлетворяют уравнению  $\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t) = f_1(x(t - \tau_1)) + c_1$ , где  $c_1 = f_2(x(t - \tau_2))$  при выбранном постоянном

значении  $x(t - \tau_2)$ . Аналогично можно восстановить с точностью до константы нелинейную функцию  $f_2$ , построив сечение  $x(t - \tau_1) = \text{const}$ , точки которого описываются уравнением  $\varepsilon_0 \dot{x}(t) + x(t) = f_2(x(t - \tau_2)) + c_2$ , где  $c_2 = f_1(x(t - \tau_1))$  при фиксированном  $x(t - \tau_1)$ .

3. В качестве примера мы продемонстрировали работоспособность метода при реконструкции по временному ряду обобщенного уравнения Маккея–Гласса, получаемого введением второго времени запаздывания:

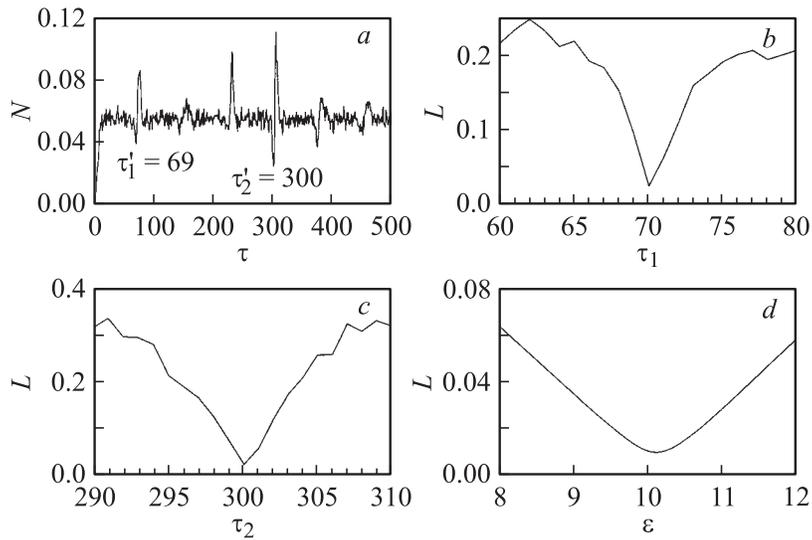
$$\dot{x}(t) = -bx(t) + \frac{1}{2} \frac{a_1 x(t - \tau_1)}{1 + x^c(t - \tau_1)} + \frac{1}{2} \frac{a_2 x(t - \tau_2)}{1 + x^c(t - \tau_2)}. \quad (9)$$

Поделив обе части уравнения (9) на  $b$ , можно привести его к виду (4) с  $\varepsilon_0 = 1/b$ . Параметры системы (9)  $a_1 = 0.2$ ,  $a_2 = 0.3$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 10$ ,  $\tau_1 = 70$ ,  $\tau_2 = 300$  соответствовали движению на хаотическом аттракторе высокой размерности, шаг интегрирования равнялся 1.

На рис. 1, а приведена зависимость  $N(\tau)$ . Положение первых двух наиболее ярко выраженных минимумов  $N(\tau)$  позволяет восстановить времена запаздывания  $\tau'_1 = 69$  и  $\tau'_2 = 300$ . Еще один характерный минимум  $N(\tau)$  наблюдается вблизи  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ . При восстановленных параметрах  $\tau'_1$  и  $\tau'_2$  мы получили среднее значение параметра инерционности  $\varepsilon'_0 = 9.4$  ( $\varepsilon_0 = 1/b = 10$ ). Для оценки производных  $\dot{x}(t)$  и  $\ddot{x}(t)$  по временному ряду использовалась локальная параболическая аппроксимация. Для уменьшения погрешности определения  $\varepsilon_0$  по формуле (7) мы исключали из рассмотрения точки с очень малой величиной  $\ddot{x}(t)$ .

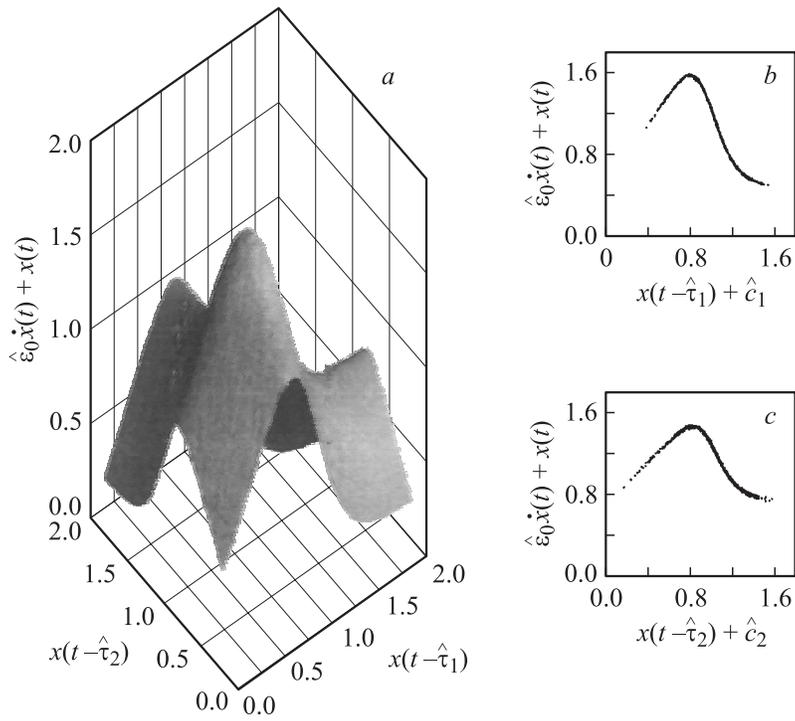
Спроецировав временной ряд уравнения (9) в трехмерное пространство  $(\varepsilon'_0 \dot{x}(t) + x(t), x(t - \tau'_1), x(t - \tau'_2))$  и построив сечения этого пространства плоскостями  $x(t - \tau'_1) = \text{const}$  и  $x(t - \tau'_2) = \text{const}$ , мы получили в этих сечениях восстановленные с точностью до константы нелинейные функции  $f_1$  и  $f_2$ . Однако из-за погрешностей определения параметров  $\tau_1$  и  $\varepsilon_0$  нелинейные функции восстановились недостаточно точно.

Для достижения более высокого качества реконструкции модельного уравнения можно использовать следующую процедуру уточнения параметров. Меняя величину  $\tau_1$  в малой окрестности  $\tau'_1 = 69$ , мы строили зависимости  $(\varepsilon'_0 \dot{x}(t) + x(t))$  от  $(x(t - \tau_1) + c'_1)$ , где  $c'_1$  определяется выбором сечения  $x(t - \tau'_2) = \text{const}$ , добиваясь зависимости, наиболее близкой к однозначной. В качестве количественного критерия однозначности при таком уточнении  $\tau_1$  нами использовалась



**Рис. 1.** *a* — число  $N$  пар экстремумов временного ряда уравнения (9), удаленных друг от друга на время  $\tau$ , в зависимости от величины  $\tau$ .  $N(\tau)$  нормировано на общее число экстремумов во временном ряду. *b* — длина  $L$  линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки на плоскости  $(x(t - \tau_1) + c'_1, \varepsilon'_0 \dot{x}(t) + x(t))$  в зависимости от  $\tau_1$ . *c* — длина  $L$  линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки на плоскости  $(x(t - \tau_2) + \hat{c}_2, \varepsilon'_0 \dot{x}(t) + x(t))$  в зависимости от  $\tau_2$ . *d* — длина  $L$  линии, соединяющей упорядоченные по величине абсциссы точки на плоскости  $(x(t - \hat{\tau}_1) + \hat{c}_1, \varepsilon \dot{x}(t) + x(t))$  в зависимости от  $\varepsilon$ .

минимальная длина линии  $L(\tau_1)$ , соединяющей точки на плоскости  $(x(t - \tau_1) + c'_1, \varepsilon'_0 \dot{x}(t) + x(t))$ , упорядоченные по величине абсциссы. Зависимость  $L(\tau_1)$  (рис. 1, *b*), нормированная на число точек в сечении, демонстрирует минимум при  $\hat{\tau}_1 = 70$ . Аналогичным образом проведено уточнение времени запаздывания  $\tau_2$  в малой окрестности  $\tau'_2 = 300$  (рис. 1, *c*). Обратим внимание, что при этом при построении сечения  $x(t - \hat{\tau}_1) = \text{const}$  используется уже уточненное время запаздывания  $\hat{\tau}_1 = 70$ . Минимум  $L(\tau_2)$  наблюдается при  $\hat{\tau}_2 = 300$ . В общем случае, если  $\hat{\tau}_2 \neq \tau'_2$ , то процедура уточнения  $\tau_1$  повторяется вновь при выборе



**Рис. 2.** Результаты восстановления нелинейных функций уравнения (4) при  $\hat{\varepsilon}_0 = 10.1$ ,  $\hat{\tau}_1 = 70$ ,  $\hat{\tau}_2 = 300$ . *a* — восстановленная поверхность (8), описываемая суммой функций  $f_1$  и  $f_2$ . *b* — нелинейная функция  $f_1$ , восстановленная с точностью до  $\hat{c}_1 = f_2(x(t - \hat{\tau}_2))$ , где  $x(t - \hat{\tau}_2) = 1$ . *c* — нелинейная функция  $f_2$ , восстановленная с точностью до  $\hat{c}_2 = f_1(x(t - \hat{\tau}_1))$ , где  $x(t - \hat{\tau}_1) = 1$ .

сечения  $x(t - \hat{\tau}_2) = \text{const}$ . Последовательное уточнение параметров  $\tau_1$  и  $\tau_2$  продолжается до тех пор, пока они не перестают изменяться. При небольших отклонениях начальных приближений  $\tau_1'$  и  $\tau_2'$  от истинных значений процедура является сходящейся и позволяет точно определить оба времени запаздывания.

После уточнения значений времен запаздывания следует провести уточнение параметра инерционности. Его новая оценка  $\hat{\varepsilon}_0$  может быть получена описанным выше способом по формуле (7). Однако более

надежной является оценка, при которой используются все точки одного из сечений. Такую оценку можно получить, строя, теперь уже при вариации  $\varepsilon$  в малой окрестности  $\varepsilon'_0$ , зависимости  $(\varepsilon\dot{x}(t) + x(t))$  от  $(x(t - \hat{\tau}_1) + \hat{c}_1)$ , где  $\hat{c}_1$  определяется выбором сечения  $x(t - \hat{\tau}_2) = \text{const}$ , и добиваясь зависимости, наиболее близкой к однозначной. Зависимость  $L(\varepsilon)$  (рис. 1, *d*), нормированная так же, как  $L(\tau_1)$  и  $L(\tau_2)$ , демонстрирует минимум при  $\hat{\varepsilon}_0 = 10.1$ . Отметим, что предложенная методика последовательного уточнения параметров имеет на несколько порядков более высокое быстродействие, чем метод одновременного перебора трех параметров  $\varepsilon$ ,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в пространстве вложения  $(\varepsilon\dot{x}(t) + x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2))$ .

Результаты восстановления нелинейных функций системы с двумя временами запаздывания (4) при уточненных параметрах  $\hat{\varepsilon}_0$ ,  $\hat{\tau}_1$  и  $\hat{\tau}_2$  представлены на рис. 2. Множество точек в трехмерном пространстве (рис. 2, *a*) с хорошей точностью воспроизводит двумерную поверхность, описываемую уравнением (8). Сечения этой поверхности (рис. 2, *b-c*) позволяют восстановить с точностью до константы вид нелинейных функций  $f_1$  и  $f_2$ . Заметим, что с увеличением частоты выборки точек (уменьшение шага интегрирования) качество восстановления нелинейных функций увеличивается. Для оценки возможностей метода при наличии возмущений мы применили его к зашумленным данным и обнаружили, что метод позволяет с хорошей точностью восстановить исследуемую систему при уровнях шума порядка 10%.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 03–02–17593, CRDF, Award N REC–006 и INTAS, грант № 03–55–920.

## Список литературы

- [1] Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to Functional Differential Equations. New York: Springer, 1993.
- [2] Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993.
- [3] Ikeda K. // Opt. Commun. 1979. V. 30. P. 257–261.
- [4] Lang R., Kobayashi K. // IEEE J. Quantum Electron. 1980. V. 16. P. 347–355.
- [5] Кузнецов С.П. // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. С. 1410–1428.
- [6] Bocharov G.A., Rihan F.A. // J. Comp. Appl. Math. 2000. V. 125. P. 183–199.
- [7] Cooke K.L., Driessche P. // J. Math. Biol. 1996. V. 35. P. 240–260.
- [8] Gourley S.A., Bartucelli M.V. // J. Math. Biol. 1997. V. 35. P. 843–867.

- [9] *Seidel H., Herzel H.* // *Physica D.* 1998. V. 115. P. 145–160.
- [10] *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th.* et al. // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 54. P. 3082–3085.
- [11] *Voss H., Kurths J.* // *Phys. Lett. A.* 1997. V. 234. P. 336–344.
- [12] *Ellner S.P., Kendall B.E., Wood S.N.* et al. // *Physica D.* 1997. V. 110. P. 182–194.
- [13] *Bünner M.J., Meyer Th., Kittel A., Parisi J.* // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 56. P. 5083–5089.
- [14] *Hegger R., Bünner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 558–561.
- [15] *Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A.* et al. // *Eur. Phys. J. D.* 2000. V. 10. P. 165–176.
- [16] *Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 64. 056216.
- [17] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // *Письма в ЖТФ.* 2002. Т. 28. В. 16. С. 37–44.
- [18] *Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L.* et al. // *Phys. Lett. A.* 2003. V. 308. P. 54–60.
- [19] *Прохоров М.Д., Пономаренко В.И., Караваев А.С.* // *Письма в ЖТФ.* 2004. Т. 30. В. 2. С. 81–88.