

09

## Синхронизация спектральных компонент связанных хаотических осцилляторов

© А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
ГосУНЦ „Колледж“

E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 24 марта 2004 г.

Исследуется хаотическая синхронизация двух связанных динамических систем со слегка различающимися параметрами. Показано, что переход от фазовой синхронизации к режиму лаг-синхронизации обусловлен тем, что все большее число спектральных компонент фурье-спектров связанных осцилляторов оказывается синхронизованным. В связи с этим может быть введено понятие степени фазовой синхронизации. В работе предложен способ описания степени фазовой синхронизации с помощью количественной характеристики и показано, что с увеличением параметра связи степень фазовой синхронизации увеличивается.

Фазовая синхронизация [1,2] систем, находящихся в режиме динамического хаоса, является одной из важных проблем современной теории нелинейных колебаний. Для описания и анализа фазовой синхронизации, как правило, вводится фаза  $\phi(t)$  хаотического сигнала [1–6]. Фазовая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными друг с другом и выглядят хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы

$$\Omega = \langle \dot{\phi}(t) \rangle. \quad (1)$$

В то же самое время для ряда систем (прежде всего, так называемые системы с плохо определенной фазой [3,5]) описание явления фазовой синхронизации хаотических осцилляторов с помощью фазы  $\phi(t)$  может приводить к некорректным результатам [7]. Это связано с тем, что для таких систем хаотическая временная реализация характеризуется фурье-спектром, в котором отсутствует ярко выраженная основная спектральная компонента (или таких спектральных компонент несколько).

В том случае, когда в спектре хаотического сигнала имеется одна ярко выраженная частота, фаза  $\phi(t)$  хаотического сигнала фактически является фазой, ассоциированной с этой основной частотой, при этом основная частота и частота хаотического сигнала (1) должны совпадать (см. [7]). В случае, когда в спектре нет доминирующей частотной компоненты, фаза хаотического сигнала  $\phi(t)$  не может адекватно описывать динамику системы. Для подобных ситуаций в [8,9] предложено было использовать семейство фаз  $\phi_s(t)$ , вводимое с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [10], при этом каждая из фаз  $\phi_s(t)$  ассоциирована со своим временным масштабом  $s$ . В этом случае явление фазовой синхронизации проявляется как синхронное поведение фаз связанных хаотических осцилляторов на определенных временных масштабах  $s$ , которые являются синхронизованными

$$|\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)| < \text{const.} \quad (2)$$

В [8] было показано, что по мере увеличения параметра связи между системами увеличивается диапазон синхронизованных масштабов до тех пор, пока все временные масштабы не будут синхронизованы, что соответствует установлению режима лаг-синхронизации [11], когда состояния взаимодействующих осцилляторов оказываются сдвинутыми во времени относительно друг друга  $x_1(t - \tau) \simeq x_1(t)$ . Дальнейшее увеличение параметра связи ведет к уменьшению временного запаздывания  $\tau$ . Осцилляторы стремятся к режиму полной синхронизации  $x_1(t) \simeq x_2(t)$ , вследствие чего разность фаз  $(\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t))$  стремится к нулю для всех временных масштабов.

Таким образом, введенное с помощью вейвлетного преобразования семейство фаз хаотического сигнала позволяет эффективно выявлять режим фазовой синхронизации связанных осцилляторов. В то же самое время непрерывное вейвлетное преобразование обладает более слабым разрешением в частотном диапазоне, нежели преобразование Фурье (см. [10]). Вейвлетное преобразование как бы „сглаживает“ фурье-спектр, при этом динамику временного масштаба  $s$  определяет не только спектральная составляющая фурье-спектра  $f = 1/s$ , но и соседние частотные компоненты, при этом степень их влияния определяется как расположением этих компонент в фурье-спектре, так и их интенсивностью. Таким образом, из того факта, что связанные хаотические осцилляторы синхронизованы на временном масштабе  $s$  вейвлетного спектра, еще не следует, что соответствующие частотные компоненты  $f = 1/s$  фурье-спектра рассматриваемых систем также синхронизованы.

Целью настоящей работы является рассмотрение вопроса о том, каким образом синхронизируются отдельные спектральные компоненты фурье-спектров взаимодействующих хаотических осцилляторов при изменении значения параметра связи между ними в режиме фазовой синхронизации.

Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — временные реализации, порождаемые первым и вторым связанными хаотическими осцилляторами. Фурье-спектры соответствующих колебаний будут определяться соотношением

$$S_{1,2}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{1,2}(t) e^{-i2\pi f t} dt. \quad (3)$$

Соответственно для каждой спектральной компоненты  $f$  фурье-спектра  $S(f)$  может быть введена в рассмотрение мгновенная фаза  $\phi_f(t) = \phi_{f0} + 2\pi f t$ . Однако в силу того, что фаза  $\phi_f(t)$ , соответствующая частоте  $f$  фурье-спектра  $S(f)$ , линейно растет с течением времени, разность фаз взаимодействующих осцилляторов для этой частоты  $\phi_{f1}(t) - \phi_{f2}(t) = \phi_{f01} - \phi_{f02}$  оказывается всегда ограниченной, а следовательно, условие захвата фаз

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \text{const}, \quad (4)$$

традиционно используемое для определения режима фазовой синхронизации, в данном случае оказывается бесполезным. Очевидно, что критерий синхронизации связанных осцилляторов на частотной составляющей  $f$  должен быть иным.

Поскольку в режиме лаг-синхронизации поведение взаимодействующих осцилляторов оказывается синхронизованным на всех временных масштабах  $s$  вейвлетного преобразования (см. [8]), то следует ожидать, что и все частотные компоненты фурье-спектров рассматриваемых систем тоже должны быть синхронизованными. В этом случае  $x_1(t - \tau) \simeq x_2(t)$  и, следовательно, в силу (3), должно выполняться соотношение  $S_2(f) \simeq S_1(f) e^{i2\pi\tau f}$ . Поэтому в том случае, когда два связанных хаотических осциллятора находятся в режиме лаг-синхронизации, их мгновенные фазы, соответствующие спектральной компоненте  $f$  фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$ , будут связаны между собой как  $\phi_{f2}(t) \simeq \phi_{f1}(t) + 2\pi\tau f$ , а следовательно, разность фаз  $\phi_{f2}(t) - \phi_{f1}(t)$  должна подчиняться соотношению

$$\Delta\phi_f = \phi_{f1}(t) - \phi_{f2}(t) = 2\pi\tau f. \quad (5)$$

Таким образом, на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  точки, отвечающие разности фаз спектральных компонент хаотических осцилляторов, находящихся в режиме лаг-синхронизации, должны располагаться вдоль прямой,<sup>1</sup> имеющей угловой коэффициент  $k = 2\pi\tau$  (см. также [12]).

Как было показано в [8], при разрушении режима лаг-синхронизации (например, с уменьшением параметра связи между осцилляторами) и переходе систем в режим фазовой синхронизации, часть временных масштабов  $s$  вейвлетных спектров выходит из синхронизма. Соответственно, можно ожидать, что и часть спектральных компонент фурье-спектров в режиме фазовой синхронизации также будут рассинхронизованы, что будет проявляться в отклонении точек на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  от прямой линии. При этом разумно полагать, что в первую очередь будут выходить из синхронизма те спектральные компоненты, на долю которых приходится малая доля энергии, тогда как спектральные компоненты в фурье-спектрах, характеризующиеся большей долей энергии, будут оставаться синхронизованными и соответствующие им точки на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  будут по-прежнему располагаться вдоль прямой линии. По мере дальнейшего уменьшения параметра связи все большая часть спектральных компонент будет выходить из состояния синхронизма, но до тех пор пока наиболее „энергетические“ компоненты будут синхронизованы, связанные системы будут демонстрировать режим фазовой синхронизации.

Введем в рассмотрение количественную характеристику, характеризующую число спектральных компонент фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$ , находящихся в режиме синхронизма

$$\sigma_L = \frac{\int_0^{+\infty} H(S_1(f) - L)H(S_2(f) - L)(\Delta\phi_{f_j} - 2\pi\tau f_j)^2 df}{\int_0^{+\infty} H(S_1(f) - L)H(S_2(f) - L)df}, \quad (6)$$

где  $H(\xi)$  — функция Хевисайда,  $L$  — пороговый уровень мощности (измеряемый в децибеллах), начиная с которого учитываются спектральные компоненты, а величина  $\tau$  определяется временным сдвигом частотной компоненты  $f_m$  спектров  $S_{1,2}(f)$ , характеризующейся наибольшим значением энергии:  $\tau = (\phi_{f_{m2}} - \phi_{f_{m1}})/(2\pi f_m)$ . Величина  $\sigma_L$

<sup>1</sup> Понятно, что для случая полной синхронизации  $\mathbf{x}_1(t)f \simeq \mathbf{x}_2(t)$  разность фаз  $\Delta\phi_f$  для всех составляющих  $f$  фурье-спектра  $S(f)$  равна нулю.

является мерой степени фазовой синхронизации. Величина  $\sigma_L$  стремится к нулю в режимах полной и лаг-синхронизации. В режиме фазовой синхронизации величина  $\sigma_L$  увеличивается по мере того, как выходят из синхронизма спектральные компоненты фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$  взаимодействующих осцилляторов.

При обработке реальных данных приходится иметь дело с дискретными временными рядами конечной длины, поэтому вместо непрерывного фурье-преобразования (3) необходимо использовать его дискретный аналог, а вместо интеграла (6) использовать сумму

$$\sigma_L = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta\phi_{f_j} - 2\pi\tau f_j)^2, \quad (7)$$

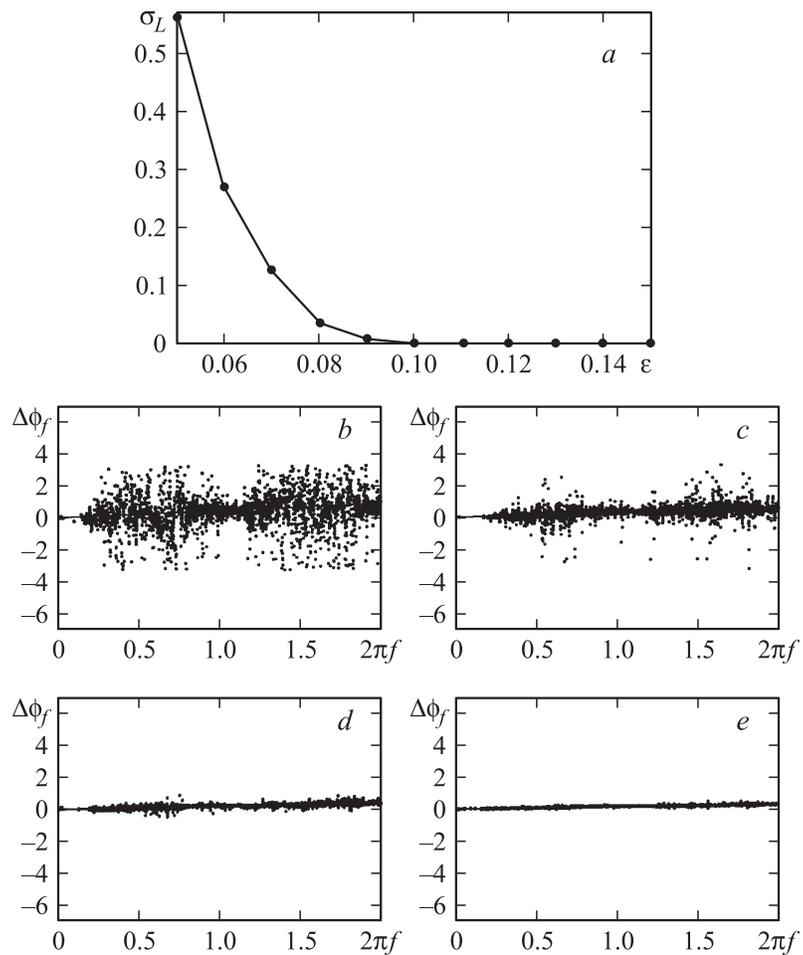
где суммирование ведется по всем спектральным компонентам фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$ , уровень мощности которых превышает  $L$ . Кроме того, при вычислении  $\sigma_L$  целесообразно провести усреднение по набору временных реализаций [12,13].

Проиллюстрируем все вышесказанное на примере двух связанных систем Ресслера, находящихся в режиме винтового хаоса:

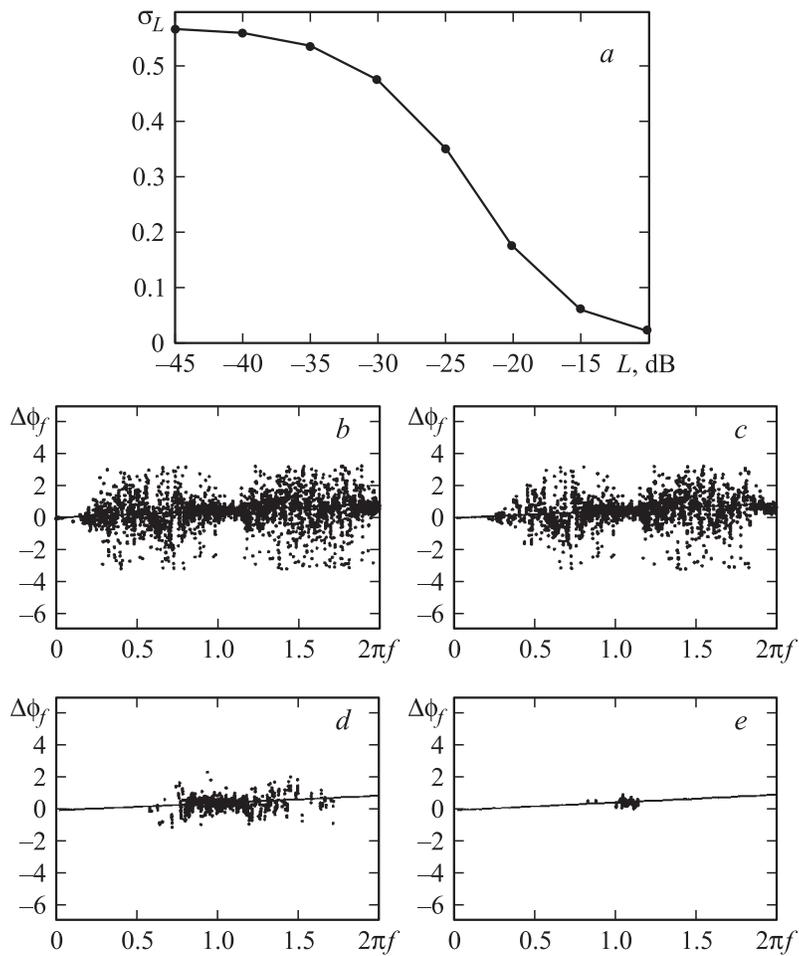
$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\varepsilon$  — параметр связи,  $\omega_1 = 0.98$ ,  $\omega_2 = 1.03$ . Значения управляющих параметров были выбраны по аналогии с [14] следующими:  $a = 0.22$ ,  $p = 0.1$ ,  $c = 8.5$ . В [14] было показано, при величине параметра связи  $\varepsilon = 0.05$  две связанные системы Ресслера находятся в режиме фазовой синхронизации. При величине значения параметра связи  $\varepsilon = 0.15$  рассматриваемые системы демонстрируют режим лаг-синхронизации.

На рис. 1, *a* показана зависимость величины  $\sigma_L$  от значения параметра связи  $\varepsilon$ . Видно, что с увеличением связи  $\sigma_L$  стремится к нулю, что свидетельствует об установлении в рассматриваемой системе режима лаг-синхронизации. Рис. 1, *b–e* иллюстрируют возрастание числа синхронизованных спектральных компонент фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$  по мере увеличения параметра связи: рис. 1, *b* соответствует случаю слабой фазовой синхронизации, когда этот режим только возник ( $\varepsilon = 0.05$ ),



**Рис. 1.** Зависимость величины  $\sigma_L$  от значения параметра связи  $\epsilon$  (a) и разность фаз  $\Delta\phi_f$  для различных частотных компонент  $f$  фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$  связанных систем Ресслера. Длина временной реализации  $x(t)$  составляла 2000 единиц безразмерного времени, шаг дискретизации  $h = 0.2$ . Усреднение проводилось по 150 отдельным временным реализациям. Значения параметра связи:  $b$  —  $\epsilon = 0.05$ ;  $c$  —  $\epsilon = 0.08$ ;  $d$  —  $\epsilon = 0.1$  и  $e$  —  $\epsilon = 0.15$ . Уровень мощности  $L = -40$  dB.



**Рис. 2.** Зависимость величины  $\sigma_L$  от величины уровня мощности  $L$ , начиная с которого учитываются спектральные компоненты при определении  $\sigma_L$  (а), и разность фаз  $\Delta\phi_f$  для различных частотных компонент  $f$  фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$  связанных систем Ресслера. Величина уровня мощности:  $b$  —  $L = -40$  dB;  $c$  —  $L = -30$  dB;  $d$  —  $L = -20$  dB и  $e$  —  $L = -10$  dB. Значение параметра связи  $\varepsilon = 0.05$ .

рис. 1, *c, d* иллюстрирует достаточно сильную фазовую синхронизацию ( $\varepsilon = 0.08$  и  $\varepsilon = 0.1$  соответственно), а рис. 1, *e* иллюстрирует режим лаг-синхронизации соответственно, когда все спектральные компоненты синхронизованы ( $\varepsilon = 0.15$ ).

Важным представляется также вопрос о том, какие спектральные компоненты фурье-спектров взаимодействующих хаотических осцилляторов синхронизируются первыми, а какие — в последнюю очередь. На рис. 2, *a* для значения управляющего параметра  $\varepsilon = 0.05$ , когда в системе реализуется режим фазовой синхронизации, приведена зависимость величины  $\sigma_L$  от уровня мощности  $L$ , начиная с которого учитываются спектральные компоненты  $f_j$  фурье-спектров  $S_{1,2}(f)$  в соотношении (7). Видно, что по мере „отсечения“ частотных компонент, обладающих малой долей энергии, величина  $\sigma_L$  уменьшается. Рис. 2, *b–e* иллюстрируют распределение разности фаз  $\Delta\phi_f$  спектральных компонент  $f$ , мощность которых превышает заданный уровень  $L$ . Таким образом, рис. 2 свидетельствует о том, что наиболее „энергичные“ спектральные компоненты при возникновении режима фазовой синхронизации синхронизируются в первую очередь, и наоборот, при разрушении режима лаг-синхронизации первыми выходят из синхронизма спектральные компоненты, на которые приходится малая доля энергии колебаний.

Работа выполнена при поддержке Программы „Университеты России“, Программы поддержки ведущих научных школ РФ, а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)). А.Е.Х. благодарит также за поддержку Фонд „Династия“ и Международный центр фундаментальной физики (Москва).

## Список литературы

- [1] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76 (11). P. 1804–1807.
- [2] *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 55 (3). P. 2353–2361.
- [3] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10 (10). P. 2291–2305.

- [4] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 17 (2). С. 133–162.
- [5] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
- [6] *Anishchenko V.S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments. Springer–Verlag, Heidelberg, 2001.
- [7] *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49 (1). С. 76–82.
- [8] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // Докл. Академии наук. 2004. Т. 395 (1).
- [9] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79 (7).
- [10] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
- [11] *Rosenblum M., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78 (22). P. 4193–4196.
- [12] *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. V. 2 (3). P. 633–644.
- [13] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999.
- [14] *Rosenblum M.G. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89 (26). P. 264 102.