01

К вопросу синергетического описания поведения температуры в сильно неоднородных средах

© С.О. Гладков

Московский государственный областной университет

Поступило в Редакцию 10 февраля 2004 г.

Из общих принципов построения инвариантного по отношению к операции инверсии I ($\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$) действия S феноменологическим путем получено нелинейное дифференнциальное управнение теплопроводности и проанализирована динамика эволюции температуры в нестационарном случае. Предложенная методика позволила выявить некоторые общие закономерности физического поведения подобного рода систем для описания необратимых явлений в процессах самоорганизации. Отмечено, что подобная ситуация может быть реализована, как пример, в сильно неоднородных структурах при стохастичности внутренних потоков тепла.

Важнейшее значение при исследовании эволюционного характера развития тех или иных физических процессов имеет оценка их детерминированности. Все механические и квантово-механические системы подчинены обратимым во времени (они инвариантны по отношению к операции инверсии времени $(t \to -t)$) уравнениям движения. В первом случае это второй закон Ньютона, а во втором — уравнение Шредингера. Именно по этой причине с их помощью может описываться лишь обратимая во времени динамика. Что касается необратимых процессов, скажем, теплопроводности или диффузии, то по Пригожину [1] их характеризует отсутствие так называемой „стрелы времени“, с математической точки зрения означающее просто интервал $t \in (-\infty, +\infty)$. Именно в этом заключается существенное отличие математического описания обратимых и необратимых явлений, когда у изучаемой динамической системы либо есть прошлое (обратимость), либо его нет (необратимость).

Надо сказать, что характерной особенностью, присущей всем обратимым процессам, свойственно такое понятие, как динамическая устойчивость равновесного состояния, означающее, что система при различных возмущениях „скатывается“ в некоторую потенциальную „яму“ устойчивого равновесия. Для устойчивого положения равновесия (механической или квантово-механической модели) в случае большого числа описываемых объектов (скажем, система, состоящая из N частиц) не имеет значения количество траекторий (траектория может быть и одна), а принципиален лишь факт прихода объекта в конечную (равновесную) точку фазового пространства p_0, q_0. Для одной частицы это реальная точка, а для N частиц — это масштабно увеличенная точка p_0, q_0, определяемая теперь уже не только вероятностным характером движения, но и „объемом“ точки p_0, q_0, а именно, некоторой локальной областью фазового объема $\Delta\Gamma_0$, куда, согласно эргодической гипотезе, сходятся все траектории по прошествии достаточно большого, но конечного интервала времени Δt, и это несмотря на то, что движение всей системы в целом весьма чувствительно к начальным условиям. Совершенно иное дело, если речь заходит о необратимых процессах. Система, выходя из положения равновесия и совершая в общем случае инфинитное движение, попадает куда угодно, но только не в область, близкую к начальной области фазового объема $\Delta\Gamma_0$, из которого началась диссипация.

Несмотря на, казалось бы, установленные закономерности в поведении обратимых и необратимых процессов, существуют и некоторые исключения из правил. Действительно, при описании чисто диссипативных явлений на больших положительных временах на первое место выходит флуктуационное поведение параметров (скажем, температуры и плотности), когда все релаксационные процессы уже завершились: равновесие достигнуто, а система продолжает совершать хаотическое блуждание во всей фазовой области (причем это блуждание длится до бесконечности), не подчиняясь при этом законам детерминированного хаоса [2,3], являясь чувствительной к начальным условиям и описывая исключительно периодическое поведение параметров. Такой пример предложен в работе [4] в случае однородной среды. Для неоднородно-распределенных в пространстве параметров ситуация кардинально меняется и флуктуации „забиваются“ этой неоднородностью, а вся система „скатывается“ в некоторое положение устойчивого равновесия [5].

В настоящем сообщении мы рассмотрим пример нелинейной самоорганизации необратимого процесса и выясним некоторые закономерности развития температуры в рамках нестационарного и нелинейного уравнения теплопроводности, которое описывает динамику на полуинтервале времен $t \in [0, +\infty)$ и которое (уравнение) можно строго вывести из вариационного принципа, воспользовавшись феноменологическим подходом, примененным, например, в работах [6,7].

С целью получения общего вида нелинейного уравнения теплопроводности, описывающего, кстати сказать, сильно неоднородные системы, воспользуемся следующим феноменологическим подходом и запишем уравнение „движения" для температуры в виде $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\delta Q}{\delta T}$, где функционал Q определяется инвариантным соотношением

$$Q\{T\} = \int\limits_{t_0 2}^{t_1} \left\{ \frac{\chi}{2} (\nabla T)^2 + \frac{\boldsymbol{\lambda}_1}{3} (\nabla T)^3 \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_2}{12} (\nabla T)^4 + \dots + \frac{\beta_1}{2} \dot{T}^2 (\nabla T)^2 + \frac{\beta_2}{2} \dot{T}^2 + \frac{\beta_3}{2} \ddot{T}^2 \right\} d^3 x, \quad (1)$$

где параметры λ и β — константы, а χ — коэффициент температуропроводности.

Для получения искомого уравнения можно воспользоваться определением вариационной производной в виде $\frac{\delta J}{\delta y} = F_y$, где $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, а функционал задан соотношением $J\{y\} = \int\limits_{x_0}^{x_1} F dx$, вполне аналогично тому, как похожие уравнения находятся в монографии [8]. Варьируя Q по температуре T, получаем следующее нелинейное уравнение, описывающее эволюцию температуры в пространстве и во времени

$$\dot{T} = \chi \Delta T + \boldsymbol{\lambda}_1 \nabla T \Delta T + \lambda_2 (\nabla T)^2 \Delta T + \dots - \beta \ddot{T} (\nabla T)^2$$
$$- \beta_1 \dot{T}^2 \Delta T - 4\beta_1 \dot{T} \nabla T \nabla \dot{T} - \beta_2 \ddot{T} + \beta_3 \ddddot{T} + \dots \quad (2)$$

Может возникнуть подозрение, что уравнение (2) не имеет отношения к реальности. Это, конечно, не так. Дело в том, что нелинейные потоки тепла всегда имеют место в сильно неоднородных по составу структурах (скажем таких, как композиты или пористые среды), когда внутри тела происходит хаотическое движение тепловых потоков, идущих из разных локальных точек внутренней области, то при смешении этих потоков может происходить своеобразный резонанс (так называемое явление синхронизации), приводящий, как увидим далее, к спонтанному повышению и осцилляциям внутренней температуры, несмотря на то, что тело помещено в термостат (!). По прошествии, однако, некоторого достаточного промежутка времени температура всего образца в целом установится равной температуре термостата.

Проблема заключается именно в том, каким образом подобную ситуацию можно смоделировать математически. Ответу на этот вопрос и посвящается настоящая работа.

Несколько упростим уравнение (2), воспользовавшись следующим формальным приемом. Положим сумму членов, содержащих различные степени градиента температуры, равной сумме членов геометрической прогрессии, а именно $\chi + \boldsymbol{\lambda}_1 \nabla T + (\lambda_2 \nabla T)^2 + \dots = \frac{\chi}{1+\boldsymbol{\lambda}\nabla T}$, где $\boldsymbol{\lambda}$ — некоторый новый постоянный векторный параметр правильной размерности. Далее, в целях еще одного модельного упрощения перейдем к конечно-разностному уравнению, избавляясь от пространственных производных с помощью правила $\boldsymbol{\lambda}\nabla E = -\frac{\lambda(T-T_0)}{\delta}$ и $\Delta T = -\frac{T-T_0}{\delta^2}$, где δ — толщина области контакта тела с термостатом, температура которого есть T_0. Поскольку мы перешли, таким образом, к уравнению теплопередачи, то имеет смысл по традиции вместо температуропроводности χ ввести коэффициент теплоотдачи α по формуле $\alpha = \frac{\kappa}{\delta^2 c_p}$, где κ — коэффициент теплопроводности, c_p — изобарическая теплоемкость единицы объема. В итоге получается следующее значительно более простое, но тем не менее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее динамику температуры в сильно неоднородных по составу средах:

$$\dot{T} = -\frac{\alpha(T-T_0)}{1+\frac{\lambda}{\delta}(T-T_0)} - \beta_1 \ddot{T}\left(\frac{T-T_0}{\delta}\right)^2 - 3\beta_1 \dot{T}^2 \frac{(T-T_0)}{\delta^2} - \beta_2 \ddot{T} + \beta_3 \dddot{T}.$$

Приведенное уравнение удобно обезразмерить, введя новую функцию $y = \frac{T-T_0}{T_0}$, безразмерные параметры $\lambda_0 = \frac{\lambda T_0}{\delta}$, $K_1 = \frac{\alpha\beta_1 T_0^3}{\delta^2}$, $K_2 = \beta_3 T_0$, $K_3 = \beta_2 T_0^2$ и безразмерное время $\tau = \alpha t$. В результате находим, что

$$\dot{y} + (K_1 y^2 + K_3)\ddot{y} + 3K_1 y \dot{y}^2 - K_2 \dddot{y} + \frac{y}{1+\lambda_0 y} = 0. \qquad (3)$$

Начальные условия выберем следующими: $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$. Заметим, что первое условие отвечает начальному значению температуры $T(0) = 2T_0$ и дифференцирование в (3) теперь ведется по безразмерному времени τ. Подчеркнем, что для малых λ_0 и $K_{1,2}$ получается обычное ньютоновское уравнение теплообмена, когда скорость изменения температуры считается пропорциональной самой температуре. Действительно, в этом случае имеем $\dot{y} + y = 0$. Его решение есть $y(\tau) = y(0)e^{-\tau}$, где $y(0)$ — начальное значение y при $\tau = 0$. Что касается уравнения (3), то для любых значений параметров $K_{1,2}$ и λ_0 его так просто не решить и нам не удалось найти его аналитическое решение. Численный же расчет позволяет определить зависимость $y(\tau)$ в широком диапазоне изменения параметров $K_{1,2,3}$ и λ_0. В самом деле, если ввести шаг h и вместо производных перейти к конечно-разностным выражениям, а именно $\dot{y} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$, $\ddot{y} = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h^2}$, то в пренебрежении четвертой производной по времени найдем

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n - \frac{h^2}{Ky_n(1+\lambda_0)} - \frac{3(y_{n+1} - y_n)^2}{y_n} - \frac{h(y_{n+1} - y_n)}{Ky_n^2}. \quad (4)$$

Численное интегрирование итерационного выражения (4) оказывается довольно сложным благодаря наличию „плохих“ знаменателей. Именно поэтому мы рассмотрим лишь качественную картину зависимости $T(t)$. Действительно, как следует из (3), для малых y имеем $\dot{y} + K_2 \ddddot{y} + K_3\ddot{y} + y = 0$. Отсюда следует характеристическое уравнение $K_2k^4 + K_3k^2 + k + 1 = 0K_2$. Решение этого алгебраического уравнения в случае, если $K_2 = \frac{27}{256}$ и $K_3 = 0$, есть $k_1 = -\frac{4}{3}$. Остальные три корня — мнимые, находящиеся из уравнения $k^3 - \frac{4k^2}{3} + \frac{16k}{9} + \frac{64}{9} = 0$. Таким образом, на фоне одного частного решения $y_1 = e^{-\frac{4\tau}{3}}$ существуют еще три осциллирующих решения $y_{2,3,4}$.

Список литературы

[1] *Nicolis G., Prigogine I.* Self-organization in Non-equilibrium Systems. N.Y.: John Wiley and Sons, 1977. (Рус. пер. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядочению через флуктуации. М.: Мир, 1979).

[2] *Schuster H.G.* Deterministic Chaos. Weinheim: Physyk-Verlag, 1984. (Рус. пер.: *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988).

[3] *Schroeder M.R.* Number Theory in Science and Communication, with Applications in Cryptography, Physics, Digital Information, Computing and Self-Similarity 2nd enlarged ed. Berlin. N. Y.: Springer, 1990.

[4] *Гладков С.О., Гладышев И.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 3. С. 1–8.
[5] *Гладков С.О., Гладышев И.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 4. С. 1–5.
[6] *Гладков С.О., Токарев А.М.* // ФГВ. 1990. В. 1. С. 30–38.
[7] *Gladkov S.O.* Dielectric properties of porous media. Springer, 2003. 261 p.
[8] *Струков Б.А., Леванюк А.П.* Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. М.: Наука, 1983. 240 с.