

09

Управляемый хаос в генераторе с дополнительным колебательным контуром

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники РАН (Фрязинское отделение),
Фрязино
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 9 февраля 2004 г.

Рассмотрен классический генератор Ван-дер-Поля, когда обеспечивается его работа при выполнении алгоритма хаотизирующей связи с дополнительным колебательным контуром. Описана математическая модель системы и приведены результаты численного анализа нового способа хаотизации ее колебаний.

Классической автоколебательной системой с дополнительным контуром является индуктивно связанный с ним генератор Ван-дер-Поля. Такая система хорошо известна и вошла в учебные пособия (см., например, [1]), хотя изучена в основном приближенными аналитическими методами. В ней возможно возбуждение лишь регулярных колебаний. Более того, она является хорошим примером одного из многих способов [2–4] повышения стабильности частоты генерируемых колебаний. В связи с этим представляется парадоксальной возможность хаотизации колебаний в такой системе. Тем не менее хаос оказывается возможным при использовании простого алгоритма взаимной хаотизирующей связи между генератором и дополнительным колебательным контуром. В настоящей работе исследуются колебательные процессы в генераторе Ван-дер-Поля, связанном с дополнительным колебательным контуром, когда выполняются условия хаотизации автоколебаний.

Уравнения генератора Ван-дер-Поля, связанного (индуктивно) с дополнительным контуром, в безразмерных переменных x и y имеют вид [1]

$$\begin{aligned}d^2x/dt^2 - \mu(1 - x^2) dx/dt + x &= m_1 d^2y/dt^2, \\d^2y/dt^2 + \varepsilon\mu dy/dt + \xi y &= m_2 d^2x/dt^2,\end{aligned}\quad (1)$$

где ε, μ, ξ — положительные параметры, $m_{1,2}$ — коэффициенты связи.

В системе, описываемой этими уравнениями, при определенных параметрах реализуются два бассейна притяжения (P_1 и P_2), соответствующие нижней (медленной) и верхней (быстрой) частотам связи. Однако даже при выполнении условий возбуждения (баланса фаз и амплитуд) для двух частот длительная реализация бигармонических колебаний затруднена. Самовозбуждение колебаний происходит в одном из двух бассейнов притяжения. При этом автоколебания в другом бассейне притяжения можно рассматривать как потенциально возможные (потенциально автоколебательные). Они возбуждаются при изменении параметров или начальных условий, а также при „подвозбуждении“ внешней силой колебаний на частоте, близкой к частоте связи, соответствующей потенциально автоколебательному бассейну притяжения.

Хаотизация движений в системе оказывается возможной при изменении для возбуждающихся колебаний бассейнов притяжения путем задания алгоритма изменения параметра расстройки. Это условие (нелинейное) можно записать следующим образом:

$$\xi = \begin{cases} \xi_1, & \text{если } x > y, \\ \xi_2, & \text{если } x < y, \end{cases} \quad (2)$$

где ξ_1, ξ_2 — значения расстройки, при которых возбуждаются колебания в одном из двух бассейнов притяжения; например, при $\xi = \xi_1$ колебания возбуждаются в бассейне притяжения P_1 , а при $\xi = \xi_2$ — в бассейне притяжения P_2 , или наоборот.

Соотношения (1) с условиями (2) определяют математическую модель управляемой нелинейной хаотизации колебаний в генераторе Ван-дер-Поля с дополнительным контуром.

Расчеты рассматриваемой системы проводились методом Рунге–Кутты 4-го порядка при шаге интегрирования по времени t , равном 0.006. Полагалось, что связь генератора с дополнительным контуром симметричная, т. е. $m_i = m$; при этом $\mu = \varepsilon = 1$.

Наличие двух бассейнов притяжения в генераторе Ван-дер-Поля с дополнительным колебательным контуром позволяет, как уже отмечалось, осуществлять принудительное переключение колебаний из одного бассейна притяжения в другой. Для исследования процессов хаотизации при переключении путем алгоритма хаотизирующей связи в качестве исходного двухмодового режима целесообразно выбрать режим, при котором в определенном интервале изменения параметра расстройки

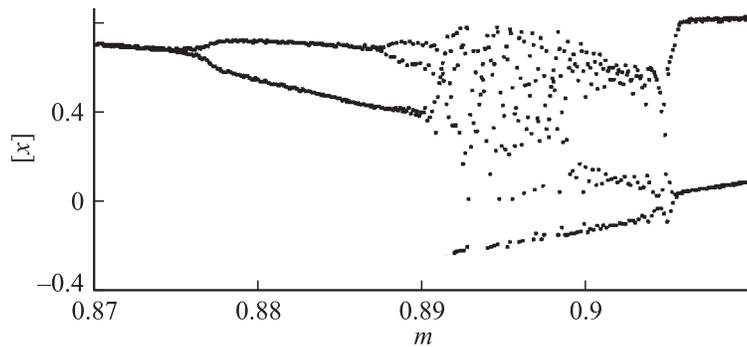


Рис. 1. Изменение максимальных значений колебательного процесса $x(t)$ в зависимости от параметра связи. Начальные условия для всех переменных выбраны равными 0.1.

существует область бистабильности. Эта область реализуется, например, когда в уравнениях (1) $m = 0.9$. В этом случае переключение колебаний происходит вблизи значения $\xi = \xi_0 \approx 1$. При $\xi = 0.98$ автономно возбуждаются колебания на быстрой частоте связи (на частоте $\omega = 1.96$), а при $\xi = 1.02$ — на медленной (на частоте $\omega = 0.97$). В случае $\xi = 0.98$ кратковременное воздействие (в интервале времени $t \in [0, 40]$) внешнего гармонического сигнала с частотой $\Omega = 1$ при амплитуде $A = 0.04$ приводит к стимулированию автоколебательного процесса в „медленноволновом“ бассейне притяжения P_1 (с частотой $\omega = 0.96$). При этом если внешний сигнал не выключается и при $t > 40$, то реализуется режим принудительной синхронизации стимулированных колебаний, так что $\omega = \Omega$.

С учетом рассмотренного поведения генератора Ван-дер-Поля с дополнительным контуром при численном анализе процессов хаотизации значения ξ_1 и ξ_2 целесообразно выбрать так, что $\xi_1 > \xi_0$, а $\xi_2 < \xi_0$. Расчеты проведены при $\xi_1 = 1.3$, $\xi_2 = 0.5$.

На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма, показывающая изменение максимальных значений колебательного процесса $x(t)$ (обозначенных $[x]$) при адиабатическом увеличении параметра связи.

Как видно, в интервале значений $m \in [0.89, 0.91]$ реализуется нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебаний $x(t)$, что свидетельствует о хаотизации колебательного

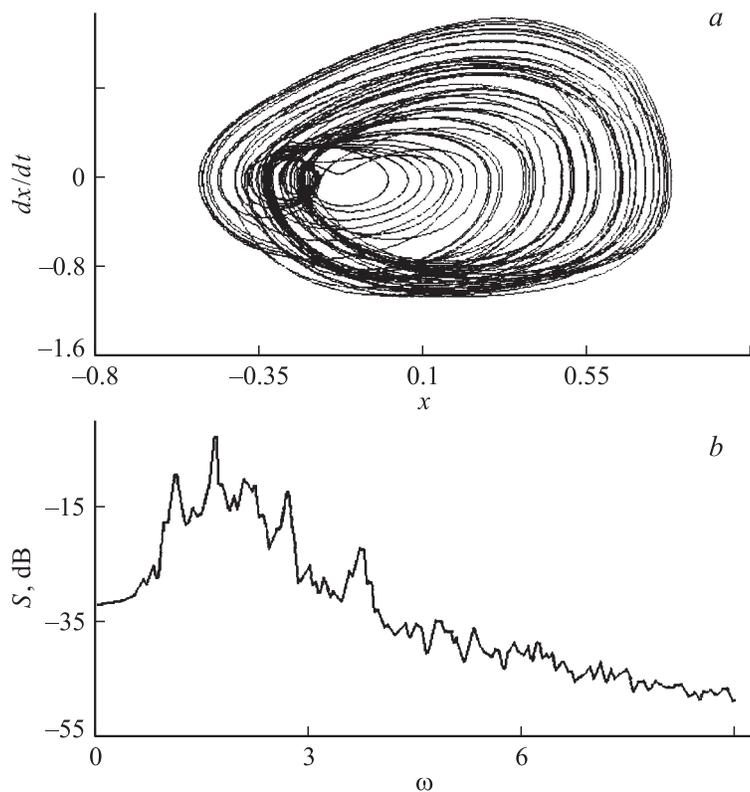


Рис. 2. Фазовый портрет в интервале времени $t \in [0, 180]$ (a) и спектр мощности (b). Они рассчитаны при начальных условиях, соответствующих значениям переменных при $m = 0.8950807$ на рис. 1.

процесса. Переход к хаосу происходит путем удвоения периода колебаний (сценарий Фейгенбаума). При хаотическом режиме происходит конкуренция между колебаниями, возбуждающимися в двух бассейнах притяжения, и система как бы постоянно находится в режиме переходных процессов.

Следует заметить, что при адиабатическом уменьшении параметра связи интервал его значений, соответствующих хаосу, несколько смещается в область меньших величин параметра связи: проявляется

гистерезис. При этом выход системы из режима хаотических движений происходит путем обратных бифуркаций — бифуркаций „уполовинивания“ периода.

На рис. 2 приведены характерный фазовый портрет (аттрактор) (*a*) и спектр мощности (*b*), рассчитанные при значении коэффициента связи, которому соответствует нерегулярный разброс точек на диаграмме рис. 1. Фазовый портрет отображает хаотический характер колебаний при использовании в системе с регулярной динамикой простейшего нелинейного алгоритма хаотизирующей связи, определяемой значениями параметра расстройки. Фазовый портрет по структуре напоминает аттрактор Рёсслера. Спектр колебаний является непрерывным, хотя и имеются резонансные выбросы спектральной плотности мощности хаотических колебаний. Спектр мощности свидетельствует о хорошем перемешивании фазовых траекторий. При этом характеристический показатель Ляпунова в режиме, при котором рассчитан спектр мощности, равен $\lambda = 0.31$.

Приведенные результаты свидетельствуют о возможности хаотизации колебаний в генераторе Ван-дер-Поля с дополнительным контуром при использовании весьма простого алгоритма хаотизирующей связи.

Следует отметить, что хаотизация колебаний в генераторе Ван-дер-Поля с дополнительным контуром возможна также при использовании алгоритма хаотизирующей обратной связи, рассмотренного в [3] применительно к генераторам с инерционностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04–02–16536).

Список литературы

- [1] Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 360 с.
- [2] Бычков С.И., Буренин Н.И., Сафаров Р.Т. Стабилизация частоты генераторов СВЧ. М.: Сов. радио, 1962. 376 с.
- [3] Железовский Б.Е., Кальянов Э.В. Многочастотные режимы в приборах СВЧ. М.: Связь, 1978. 256 с.
- [4] Кальянов Э.В. // Нелинейный мир. 2003. Т. 1. № 1, 2. С. 45–54.