

01;02;09

Излучение движущегося заряда в волноводе с диэлектриком, обладающим резонансной дисперсией

© А.В. Тюхтин

НИИ радиофизики С.-Петербургского государственного университета
E-mail: tyukhtin@niirf.spbu.ru

Поступило в Редакцию 20 января 2004 г.

Исследуется излучение точечной заряженной частицы, которая движется по оси круглого волновода, заполненного диэлектриком с частотной дисперсией резонансного типа. Показано, что дисперсия оказывает принципиальное влияние на частоты возбуждаемых гармоник и энергию излучения. Отмечено, в частности, что учет дисперсии приводит к подавлению всех возбуждаемых гармоник, причем степень этого подавления тем выше, чем больше номер гармоники.

Проблемам излучения заряженных частиц, движущихся в волноводящих структурах, посвящено значительное количество публикаций (см., например, [1–6]). Это направление остается актуальным и в настоящее время, в частности в связи с разработкой ускорителей, использующих метод кильватерного поля [4–6]. Следует, однако, отметить, что в работах по данной тематике не рассматривалось влияние конкретных дисперсионных характеристик среды на процесс излучения. Между тем, исследование соответствующих задач для безграничных сред показало, что характерная для диэлектриков дисперсия резонансного типа оказывает принципиальное влияние на характеристики излучения Вавилова–Черенкова (ИВЧ) [7,8]. Очевидно, что можно ожидать значительного влияния подобной дисперсии и в таких ситуациях, когда диспергирующая среда является ограниченной.

В настоящей работе анализируется роль резонансной дисперсии в задаче об излучении точечного заряда q , который движется с постоянной скоростью $v = c\beta$ по оси z круглого волновода с идеально проводящей стенкой. Волновод считается заполненным однородной изотропной непоглощающей средой. Выпишем прежде всего общие выражения для частот возбуждаемых мод и энергии излучения, которые приведены, в

частности, в обзоре [1]. Частоты определяются соотношением

$$\omega_m = \frac{v\chi_m}{a\sqrt{n^2\beta^2 - 1}}, \quad (1)$$

где a — радиус волновода, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — показатель преломления среды, χ_m — корни функции Бесселя с нулевым значком: $J_0(\chi_m) = 0$. При наличии дисперсии это соотношение является уравнением для определения частот, так как в правую часть входит функция $n(\omega_m)$.

Энергию излучения, приходящуюся на единицу длины пути заряда, можно представить следующим образом:

$$W = \sum_m W_m = \frac{2q^2}{a^2} \sum_m \frac{1}{\varepsilon_m [J_1(\chi_m)]^2 (1 + \delta_m)}, \quad (2)$$

где

$$\delta_m = \frac{\omega\beta^2}{2(n^2\beta^2 - 1)} \left. \frac{dn^2}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_m}. \quad (3)$$

Суммирование в (3) ведется по всем гармоникам, для которых $n_m^2\beta^2 > 1$. Напомним, что $W = -qE_z^{(0)}$, где $E_z^{(0)}$ — продольная компонента напряженности электрического поля в точке расположения заряда [1].

Рассмотрим такой случай, когда диэлектрическая проницаемость среды имеет вид

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_L^2}{\omega_r^2 - \omega^2} = \frac{\omega_r^2\varepsilon_0 - \omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2}, \quad (4)$$

где ω_r и ω_L — резонансная и ленгмюровская частоты соответственно, а $\varepsilon_0 = 1 + \omega_L^2/\omega_r^2$ — диэлектрическая проницаемость среды по отношению к постоянному полю. Магнитную проницаемость среды μ будем считать равной 1. Формула (4) описывает резонансную дисперсию при пренебрежимо малой проводимости. Излучение движущегося заряда в безграничной среде с такой дисперсией исследовалось в [7,8].

Отметим, что частоты излучаемых волн в соответствии с условием $\varepsilon(\omega)\beta^2 > 1$ всегда будут лежать в пределах $\omega_c < \omega < \omega_0$, где $\omega_c = \omega_0\sqrt{(1 - \varepsilon_0\beta^2)(1 - \beta^2)^{-1}}$ при $\varepsilon_0\beta^2 < 1$, и $\omega_c = 0$ при $\varepsilon_0\beta^2 > 1$.

Подставляя (4) в (1) и разрешая данное уравнение, находим

$$\omega_m = \frac{\omega_r}{\tilde{a}\sqrt{2(1-\beta^2)}} \times \sqrt{\tilde{a}^2 - \beta^2(\varepsilon_0\tilde{a}^2 + \chi_m^2) + \sqrt{[\tilde{a}^2 - \beta^2(\varepsilon_0\tilde{a}^2 + \chi_m^2)]^2 + 4\beta^2\tilde{a}^2\chi_m^2(1-\beta^2)}}, \quad (5)$$

где $\tilde{a} = a\omega_r/c$. Нетрудно показать, что с ростом номера гармоники ее частота монотонно нарастает, а при $m \rightarrow \infty$ она стремится к резонансной частоте среды ω_r . Разница между соседними частотами $\omega_{m+1} - \omega_m$ убывает с ростом m , обращаясь в нуль при $m \rightarrow \infty$. Для величины δ_m , входящей в (2), согласно (3) и (4), имеем

$$\delta_m = \frac{(\varepsilon_0 - 1)\beta^2\omega_r^2\omega_m^2}{(\omega_r^2 - \omega_m^2)[\omega_m^2(1-\beta^2) + \omega_r^2(\varepsilon_0\beta^2 - 1)]} = \frac{\tilde{a}^2(\varepsilon_0 - 1)}{\chi_m^2} \left(\frac{\omega_m^2}{\omega_r^2 - \omega_m^2} \right)^2. \quad (6)$$

Рассмотрим отдельно важный частный случай ультрарелятивистской скорости движения заряда, когда $1 - \beta \ll 1$. При этом выражение (5) приводится к виду

$$\omega_m \approx \frac{\omega_r\chi_m}{\sqrt{\tilde{a}^2(\varepsilon_0 - 1) + \chi_m^2}}. \quad (7)$$

Как видим, при условии $\tilde{a}^2(\varepsilon_0 - 1) \ll \chi_m^2$ частота гармоники близка к резонансной частоте среды ω_r . Поэтому в случае достаточно тонкого волновода, для которого справедливо неравенство $\tilde{a}^2(\varepsilon_0 - 1) \ll 1$, частоты всех возбуждаемых мод будут близки к частоте резонанса. Если же волновод не является тонким в указанном смысле, то частоты нескольких первых гармоник будут существенно отличаться от ω_r , но гармоники с достаточно большими номерами будут по-прежнему иметь частоты, близкие к ω_r .

Интересно сравнить частоты (7) с частотами в случае диэлектрической среды без дисперсии. Для этого случая, согласно (1), при $v \approx c$ имеем $\omega_m^{(c)} \approx \frac{c\chi_m}{a\sqrt{\varepsilon_c - 1}}$, где ε_c — диэлектрическая проницаемость недиспергирующей среды (магнитную проницаемость положим равной 1). Соотношение между частотами в этих двух задачах можно записать в виде

$$\frac{\omega_m}{\omega_m^{(c)}} = \frac{\tilde{a}\sqrt{\varepsilon_c - 1}}{\sqrt{\tilde{a}^2(\varepsilon_0 - 1) + \chi_m^2}}. \quad (8)$$

Если принять, что $\varepsilon_c = \varepsilon_0$, то различие в частотах имеется уже для первой моды, а с ростом номера моды оно становится все больше. Если же принять, что проницаемость недиспергирующей среды равна проницаемости среды с дисперсией на частоте первой моды, т.е. $\varepsilon_c = \varepsilon(\omega_1) = \varepsilon_0 + \chi_m^2 \tilde{a}^{-2}$, то частоты первой моды в обеих задачах будут одинаковыми, но частоты всех остальных мод будут отличаться, причем тем больше, чем выше номер моды.

Для величины δ_m в ультрарелятивистском случае имеем

$$\delta_m \approx \frac{\chi_m^2}{\tilde{a}^2(\varepsilon_0 - 1)} = \frac{\omega_m^2}{\omega_r^2 - \omega_m^2}. \quad (9)$$

Согласно (2), для m -гармоники получаем

$$\begin{aligned} W_m &\approx \frac{2q^2}{a^2} \frac{\tilde{a}^4(\varepsilon_0 - 1)}{(\varepsilon_0 \tilde{a}^2 + \chi_m^2) [(\varepsilon_0 - 1)\tilde{a}^2 + \chi_m^2] [J_1(\chi_m)]^2} \\ &= \frac{2q^2}{a^2} \frac{(\omega_r^2 - \omega_m^2)^2}{\omega_r^2(\varepsilon_0 \omega_r^2 - \omega_m^2) [J_1(\chi_m)]^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если же среда не обладает дисперсией, то

$$W_m^{(c)} = \frac{2q^2}{a^2} \frac{1}{\varepsilon_c [J_1(\chi_m)]^2}. \quad (11)$$

Отметим, кстати, что ряд $\sum W_m^{(c)}$ является расходящимся (здесь проявляется известный „энергетический парадокс“ теории излучения заряда, движущегося в недиспергирующей среде). Как и для случая безграничной среды, учет дисперсии разрешает данный парадокс: ряд $\sum W_m$ сходится, так как его слагаемые с достаточно большими номерами пропорциональны $\chi_m^{-3} \sim m^{-3}$ (это видно из первого выражения (10)).

Соотношение между энергиями, затрачиваемыми на возбуждение m -гармоники в задачах с дисперсией и без нее, при $\beta \approx 1$ имеет вид

$$\frac{W_m}{W_m^{(c)}} \approx \varepsilon_c \frac{(\omega_r^2 - \omega_m^2)^2}{\omega_r^2(\varepsilon_0 \omega_r^2 - \omega_m^2)} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_m} \left(1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_r^2}\right), \quad (12)$$

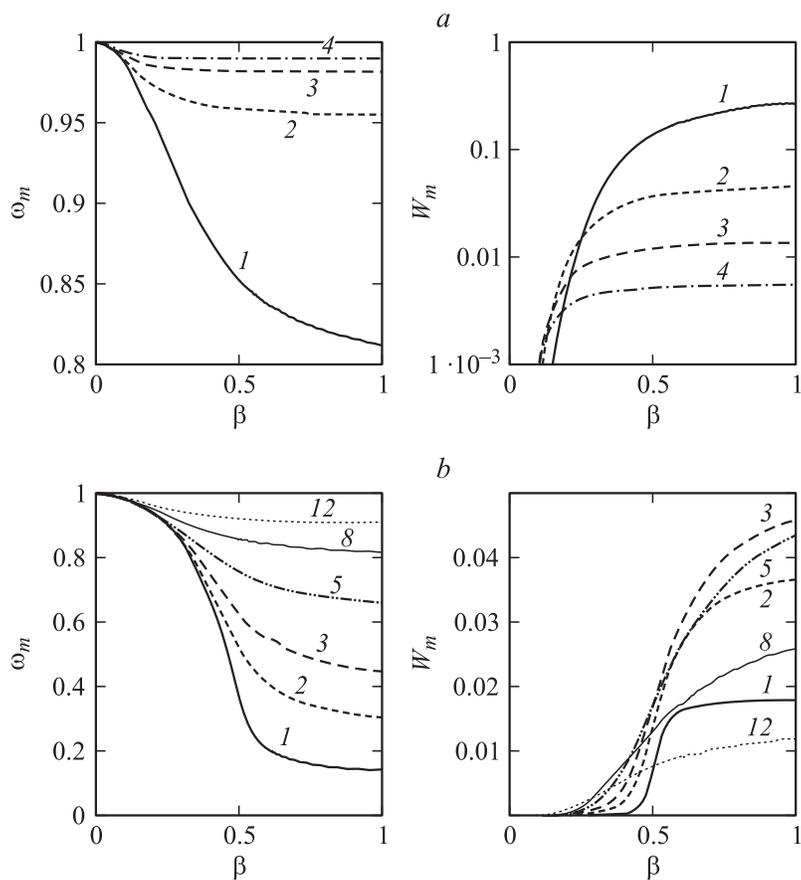
где $\varepsilon_m = \varepsilon(\omega_m)$. Как видим, даже если принять, что $\varepsilon_c = \varepsilon_1$, то и в этом случае для любой моды энергия излучения в задаче с дисперсией

оказывается меньшей, чем в задаче без дисперсии. Подчеркнем, что данное отличие имеется для всех гармоник, включая первую. Разница в энергии для первой гармоники объясняется тем, что на нее влияет не только величина диэлектрической проницаемости, но и ее производная. Как видно уже из (2), (3), в области нормальной дисперсии, где $dn^2/d\omega > 0$, энергия излучения всегда будет меньше по сравнению со случаем недиспергирующей среды (при условии равенства показателей преломления на данной частоте). С ростом номера гармоники отношение (12) становится все меньше по двум причинам: во-первых, растет величина ε_m , а во-вторых, частота ω_m становится все ближе к резонансной.

Рассмотрим зависимость энергии W_m , затрачиваемой на возбуждение одной гармоники, от ее номера m . В случае среды без дисперсии, согласно (11), W_m растет с ростом m . В случае диспергирующей среды ситуация совершенно иная. Если $\varepsilon_0 \tilde{a}^2 \ll 1$ („тонкий“ волновод), то $W_m \sim \chi_m^{-4} [J_1(\chi_m)]^{-2}$ для любой гармоники, что означает быстрое монотонное убывание энергии с ростом m . Если же $(\varepsilon_0 - 1) \tilde{a}^2 \gg 1$ („толстый“ волновод), то для не слишком больших номеров мод будет выполнено условие $(\varepsilon_0 - 1) \tilde{a}^2 \gg \chi_m^2$, вследствие чего $W_m \sim [J_1(\chi_m)]^{-2}$, и энергия растет с ростом номера моды. Однако для достаточно больших номеров, когда $\varepsilon_0 \tilde{a}^2 \ll \chi_m^2$, имеет место быстрое убывание энергии с ростом номера по тому же закону, как и для „тонкого“ волновода.

На рисунке, a, b представлены частоты и энергии для нескольких гармоник в зависимости от скорости движения заряда при $\varepsilon_0 = 4$ и двух значениях „безразмерного радиуса“ \tilde{a} . Подчеркнем, что абсолютная величина ω_r здесь не играет роли, так как частоты даны в единицах ω_r , а энергии — в единицах $q^2 \omega_r^2 c^{-2}$. Номера гармоник указаны около каждой кривой. Для случая $\tilde{a} = 1$ показаны первые четыре гармоники (см. рисунок, a), а для случая $\tilde{a} = 10$ показаны 1, 2, 3, 5, 8 и 12 гармоники (см. рисунок, b). Как видим, чем толще волновод, тем быстрее уменьшаются частоты с ростом скорости и тем больше разница между частотами соседних мод при одном и том же значении β . К примеру, при $\beta \approx 1$ для волновода с радиусом $\tilde{a} = 1$ частоты гармоник с $m \geq 2$ отличаются от резонансной частоты менее, чем на 5%. В то же время при $\tilde{a} = 10$ в этот частотный диапазон попадают лишь гармоники с $m \geq 14$.

Энергия, затрачиваемая на возбуждение той или иной гармоники, всегда растет с ростом скорости движения заряда. При не слишком малой скорости и относительно небольшом радиусе волновода вклад



Зависимости частот и энергий от скорости движения заряда для случая $\epsilon_0 = 4$ при $\tilde{a} = 1$ (a) и $\tilde{a} = 10$ (b). Частоты ω_m даны в единицах ω_r , энергии W_m — в единицах $q^2 \omega_r^2 c^{-2}$.

гармоники в полную энергию излучения уменьшается с ростом ее номера. К примеру, при $\beta \geq 0.5$ для волновода с $\tilde{a} = 1$ величина W_2 на порядок меньше, чем W_1 , а W_3 меньше W_2 еще в несколько раз (см. рисунок, a). Фактически в таких условиях возбуждаемое частицей поле является одномодовым. Совсем другая картина имеет место для более толстых волноводов. Так, при $\tilde{a} = 10$ первая мода уже не является ведущей (см. рисунок, b). К примеру, если $\beta \approx 1$, то выполняются

неравенства $W_1 < W_2 < W_3 \approx W_4 > W_5 > W_6 > \dots$. Таким образом, в данных условиях поле носит сложный многомодовый характер: наиболее значимыми оказываются 3 и 4 моды, а еще несколько соседних мод с ними сопоставимы. При дальнейшем росте радиуса волновода максимум „энергетического распределения“ сместится в сторону гармоник с более высокими номерами.

Полученные результаты свидетельствуют о значительном влиянии резонансной дисперсии среды на генерацию ИВЧ в волноводах. Отметим, что, как правило, на практике используются структуры, имеющие осесимметричный вакуумный канал (это позволяет избавиться от поляризационных потерь энергии). Однако ясно, что при не слишком большом радиусе такого канала отмеченные выше эффекты будут также иметь место. Детальное описание ИВЧ в подобных ситуациях выходит за рамки данной работы.

Автор признателен А.Д. Канарейкину за плодотворную дискуссию.

Список литературы

- [1] *Болотовский Б.М.* // УФН. 1961. Т. 75. № 2. С. 295–350.
- [2] *Зрелов В.П.* Излучение Вавилова–Черенкова и его применение в физике высоких энергий. Ч. 1. М., 1968. 276 с.
- [3] *Цытович В.Н.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 5. С. 597–604.
- [4] *Gai W., Schoessow P., Cole B.* et al. // Phys. Rev. Letters. 1988. V. 61. N 24. P. 2756–2758.
- [5] *Power J.G., Conde M.E., Gai W.* et al. // Phys. Rev. Special Topics — Accelerators and Beams. 2000. V. 3. P. 101302–1–7.
- [6] *Варданян А.С., Оксюзян Г.Г.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. В. 4. С. 76–80.
- [7] *Afanasiev G.N., Kartavenko V.G.* // Journal of Physics D. 1998. V. 31. P. 2760–2776.
- [8] *Afanasiev G.N., Kartavenko V.G., Magar E.N.* // Physica B. 1999. V. 269. P. 95–113.