

01;09

Анализ фазовой хаотической синхронизации с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

© А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 25 декабря 2003 г.

Предложен новый метод введения фазы хаотического сигнала, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании. С помощью данного метода изучается фазовая синхронизация двух хаотических динамических систем с плохо определенной фазой.

Фазовая синхронизация [1–3] систем, находящихся в режиме динамического хаоса, является одним из важнейших явлений современной теории нелинейных колебаний. Явление фазовой хаотической синхронизации экспериментально наблюдалось для радиотехнических генераторов [4], лазеров [5], электрохимических осцилляторов [6], сердечного ритма [7], газового разряда [8] и т.д. (см. также [3,9,10]). Изучение явления хаотической синхронизации весьма важно применительно к передаче информации с помощью детерминированных хаотических колебаний [11].

Для описания и анализа фазовой синхронизации, как правило, вводится фаза $\phi(t)$ хаотического сигнала [1,3,9,10]. Фазовая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются не связанными друг с другом и выглядят хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы $\langle \dot{\phi}(t) \rangle$.

В настоящее время не существует универсального способа введения фазы хаотического сигнала, который бы давал корректные результаты для любых динамических систем. Существует несколько способов введения фазы, подходящих для „хороших“ систем с простой топологией хаотического аттрактора. Во-первых, часто фаза $\phi(t)$

хаотического сигнала вводится как угол в полярной системе координат на плоскости (x, y) [12]. Во-вторых, для определения фазы для хаотической системы рассматривается аналитический сигнал [1,9] $\xi(t) = x(t) + jH[x(t)] = A(t)e^{j\phi(t)}$, где $H[x(t)]$ является преобразованием Гильберта хаотического сигнала $x(t)$ [13]. В-третьих, для определения фазы хаотического сигнала используется поверхность сечения Пуанкаре, причем предполагается, что между двумя последовательными пересечениями фазовой траекторией сечения Пуанкаре фаза сигнала меняется линейно [1,3,9].

Все вышеописанные подходы дают сходные корректные результаты для „хороших“ систем [1,3,9,10]. В то же самое время эти методы часто приводят к некорректным результатам для систем с плохо определенной фазой (см., например, [3,15]). Вследствие этого фазовая синхронизация подобных систем, как правило, может быть выявлена с помощью косвенных измерений [3,9,14].

В настоящей работе рассматривается новый метод выявления режима фазовой синхронизации динамических систем с плохо определенной фазой. Поведение таких систем может быть охарактеризовано с помощью непрерывного множества фаз, которое определяется с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [16,17] хаотического сигнала $x(t)$

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi_{s,t_0}^*(t)dt, \quad (1)$$

где $\psi_{s,t_0}(t)$ — вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета $\psi_0(t)$:

$$\psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_0\left(\frac{t-t_0}{s}\right). \quad (2)$$

Временной масштаб s определяет ширину вейвлета $\psi_{s,t_0}(t)$, t_0 — временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени („*“ означает комплексное сопряжение). Следует отметить, что при проведении вейвлетного анализа понятие „временной масштаб“, как правило, используется вместо понятия „частота“, традиционного для фурье-преобразования.

В качестве материнского вейвлета был использован Морлет-вейвлет [16] $\psi_0(\eta) = (1/\sqrt[4]{\pi}) \exp(j\omega_0\eta) \exp(-\eta^2/2)$. Выбор значения параметра вейвлета $\omega_0 = 2\pi$ обеспечивает соотношение $s \simeq 1/f$ между

временным масштабом s вейвлетного преобразования и частотой f преобразования Фурье.

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| \exp[j\phi_s(t_0)] \quad (3)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Удобно также ввести интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по временным масштабам

$$E(s) = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0.$$

В то же самое время естественным образом оказывается определенной фаза $\phi_s(t) = \arg W(s, t)$ для каждого временного масштаба s . Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\phi_s(t)$.

Рассмотрим поведение двух взаимно связанных неидентичных хаотических осцилляторов. Если рассматриваемые осцилляторы не находятся в режиме фазовой синхронизации, то их поведение является несинхронизованным на всех временных масштабах s . Как только какие-либо из временных масштабов рассматриваемых динамических систем синхронизируются (например, при увеличении параметра связи между системами), возникает режим фазовой синхронизации. Очевидно, что в первую очередь оказываются синхронизованными те временные масштабы, на которые приходится наибольшая доля энергии вейвлетного спектра $E(s)$. Остальные временные масштабы по-прежнему остаются рассинхронизованными. При этом фазовая синхронизация ведет к появлению захвата фаз на синхронизованных временных масштабах s

$$|\phi_{s,1}(t) - \phi_{s,2}(t)| < \text{const.} \quad (4)$$

В соотношении (4) $\phi_{s,1,2}(t)$ — непрерывные фазы первого и второго осцилляторов, соответствующие синхронизованным временным масштабам s .

Предложенный подход, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании, может быть с успехом применен к любым динамическим системам, в том числе и к системам с плохо определенной фазой.

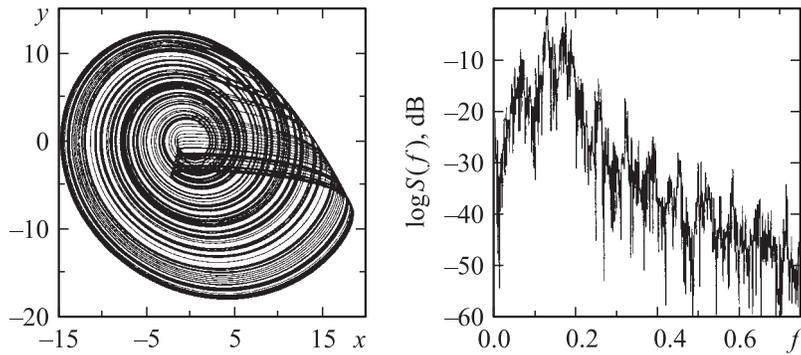


Рис. 1. Проекция фазового портрета на плоскость (x, y) и спектр мощности для первой системы Ресслера. Параметр связи $\varepsilon = 0$.

В качестве примера рассмотрим поведение двух взаимно связанных неидентичных систем Ресслера, находящихся в режиме винтового хаоса (рис. 1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (5)$$

где ε — параметр связи, $\omega_1 = 0.98$, $\omega_2 = 1.03$, $a = 0.22$, $p = 0.1$, $c = 8.5$.

Рис. 2, *a* иллюстрирует поведение двух связанных систем Ресслера в том случае, когда параметр связи мал ($\varepsilon = 0.025$). Спектры мощности вейвлетного преобразования $E(s)$ отличаются друг от друга для первой и второй систем (рис. 2, *a*), однако максимальное значение энергии в обоих случаях приходится примерно на один и тот же временной масштаб s . Из рис. 2, *a* следует, что разность фаз $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$ растет неограниченно на всех временных масштабах. Это означает, что в рассматриваемых системах не существует таких временных масштабов, которые были бы синхронизованы друг с другом, а соответственно и сами системы являются несинхронизованными.

С увеличением значения параметра связи системы переходят в режим фазовой синхронизации (см., например, [12]). Так, в [14] с

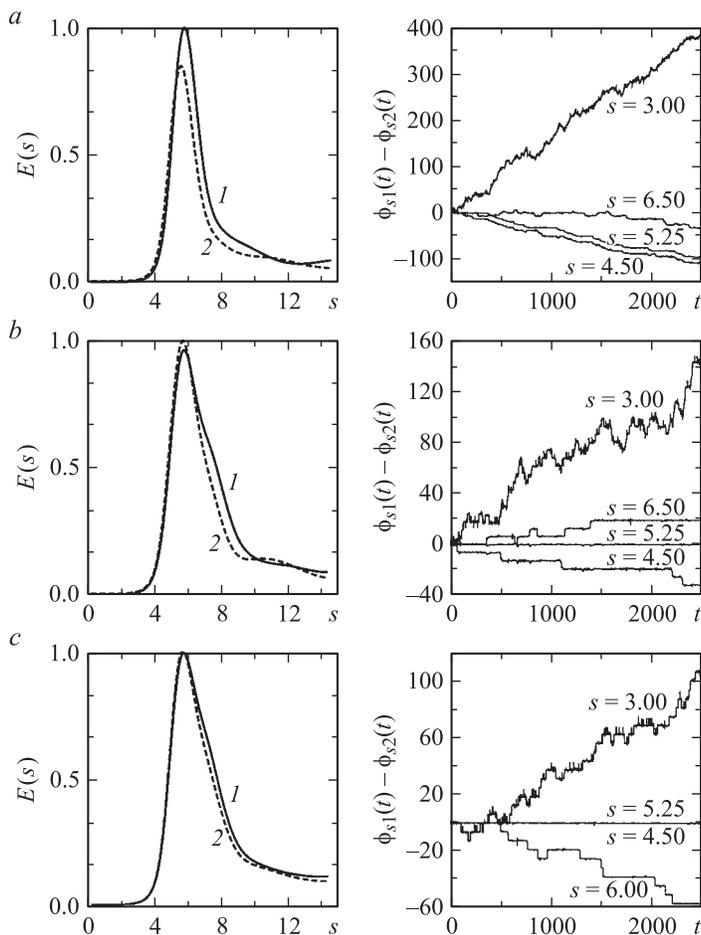


Рис. 2. Нормированный энергетический спектр $E(s)$ вейвлетного преобразования для первой (показана непрерывной линией 1) и второй (пунктирная линия 2) систем Ресслера, а также разность фаз $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$ для двух связанных систем Ресслера для следующих случаев: a — величина параметра связи $\varepsilon = 0.025$ (режим синхронизации отсутствует); b — $\varepsilon = 0.05$ (временные масштабы $s = 5.25$ синхронизованы друг с другом, в системах реализуется режим фазовой синхронизации); c — $\varepsilon = 0.07$ (число синхронизованных временных масштабов увеличивается).

помощью косвенных измерений было показано, что при величине параметра связи $\varepsilon = 0.05$ две связанные системы Ресслера находятся в режиме фазовой синхронизации. Поведение разности фаз $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$ для данного случая представлено на рис. 2, *b*. Видно, что на временном масштабе $s = 5.25$, который характеризуется наибольшим значением энергии в вейвлетном спектре $E(s)$ (рис. 2, *b*), наблюдается захват фаз. Таким образом, можно сказать, что временные масштабы $s = 5.25$ двух систем Ресслера оказываются синхронизованными друг с другом. Одновременно все близлежащие к $s = 5.25$ временные масштабы также синхронизованы. Важно также отметить, что сильно отличающиеся временные масштабы (например, такие, как $s = 4.5, 6.0$ и др.) остаются несинхронизованными и для этих масштабов явления захвата фаз не наблюдается (см. рис. 2, *b* и ср. с рис. 2, *a*).

С дальнейшим увеличением параметра связи (например, при $\varepsilon = 0.07$) временные масштабы, бывшие ранее несинхронизованными, синхронизируются (рис. 2, *c*). Видно, что, например, временные масштабы $s = 4.5$ в обеих системах синхронизованы друг с другом, в отличие от предыдущего случая ($\varepsilon = 0.05$, рис. 2, *b*), когда они были несинхронизованы. Количество временных масштабов, на которых наблюдается захват фаз, увеличивается, но в то же самое время некоторые временные масштабы (например, $s = 3.0$ и $s = 6.0$) остаются несинхронизованными, как и ранее.

Подводя итог, отметим несколько важных аспектов. Во-первых, традиционные подходы, обсуждаемые в начале статьи по выявлению режима фазовой синхронизации, основанные на введении фазы хаотического сигнала, являются корректными для таких временных рядов, которые характеризуются фурье-спектром с ярко выраженной основной частотой f_0 . В этом случае фаза ϕ_{s0} , введенная для временного масштаба $s_0 \simeq 1/f_0$, приближенно совпадает с фазой $\phi(t)$ хаотического сигнала, введенной традиционными способами. Действительно, поскольку остальные частоты (или, можно сказать, остальные временные масштабы) не играют значительной роли в фурье-спектре, фаза $\phi(t)$ хаотического сигнала близка к фазе $\phi_{s0}(t)$ основной частотной компоненты f_0 (и соответственно основного временного масштаба s_0). Очевидно, что в этом случае средние частоты $f = \langle \dot{\phi}(t) \rangle$ и $\bar{f}_{s0} = \langle \dot{\phi}_{s0}(t) \rangle$ должны совпадать друг с другом и с основной частотой f_0 фурье-спектра (см. также [15]) $\bar{f} = \bar{f}_{s0} = f_0$.

Если же хаотическая временная реализация характеризуется фурье-спектром, в котором отсутствует ярко выраженная основная спектральная компонента (как, например, спектр для системы Ресслера, рис. 1), то традиционные подходы введения фазы хаотического сигнала, обсуждаемые во введении, уже не работают и могут давать некорректные результаты. Предложенный в работе подход, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании и введении непрерывного множества фаз, напротив, может быть успешно использован для любого типа хаотического сигнала.

Во-вторых, предложенная методика может быть использована для анализа экспериментальных данных, поскольку она не требует каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Более того, в ряде случаев применение вейвлетного преобразования может уменьшить влияние шумов [16,18]. Представляется вполне вероятным, что описанная методика может быть полезной и эффективной для анализа временных рядов, порождаемых физическими, биологическими, физиологическими и другими системами.

Итак, в настоящей работе предложен новый подход для описания явления хаотической синхронизации, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании и рассмотрении динамики систем на различных временных масштабах. Данный подход может быть применен к любым хаотическим системам (в том числе и к системам с плохо определенной фазой) и экспериментальным временным рядам.

Работа поддержана РФФИ и грантом CRDF REC-006 (U.S. Civilian Research & Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union).

Список литературы

- [1] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1804.
- [2] *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurth J.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 2353.
- [3] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001.
- [4] *Parlitz U., Junge L., Lauterborn W.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 2115.
- [5] *Allaria E. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 791.
- [6] *Kiss I.Z., Hudson J.L.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 046215.
- [7] *Anishchenko V.S. et al.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. P. 2339.

- [8] *Ticos C.M.* et al. // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85. P. 2929.
- [9] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // *Int J. Bifurcation and Chaos.* 2000. V. 10. P. 2291.
- [10] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* // *Радиотехника и электроника.* 2002. В. 47. С. 117.
- [11] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* *Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи.* М.: Физматлит, 2002.
- [12] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. P. 4193.
- [13] *Anishchenko V.S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L.* *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments.* Springer-Verlag, Heidelberg, 2001.
- [14] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 89. P. 264102.
- [15] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* // *Радиотехника и электроника.* 2004. В. 49.
- [16] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* *Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения.* М.: Физматлит, 2003.
- [17] *Lachaix J.P.* et al. // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2000. V. 10. P. 2429.
- [18] *Гусев В.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* // *Письма в ЖТФ.* 2003. Т. 29. В. 18. С. 61–69.