

01

Формирование хаотических аттракторов при использовании бистабильных систем

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники РАН (Фрязинское отделение),
Фрязино
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 10 ноября 2003 г.

Рассматривается новый способ неавтономного возбуждения хаотических колебаний при использовании бистабильных систем. На примере триггера численными методами проиллюстрировано формирование оригинального хаотического аттрактора, отображающего переключение затухающих движений между двумя бассейнами притяжения.

Бистабильные системы широко используются в различных областях науки и техники. В последнее время они интенсивно исследуются в связи с возможностью проявления в них стохастического резонанса (см., например, [1]). В данной работе исследуется возможность применения таких систем для генерирования динамического хаоса. На примере систем триггерного типа численными методами рассматривается формирование хаотических колебаний при использовании относительно простого алгоритма, названного алгоритмом хаотизирующей обратной связи.

При построении математической модели формирования хаотических колебаний воспользуемся нормированными уравнениями триггера, приведенными в [2]:

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - g(x), \\ dy/dt &= -\delta(x + y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $g(x)$ — нелинейная характеристика активного элемента, δ — постоянный коэффициент.

Для обеспечения в системе (1) двух устойчивых состояний при численном анализе нелинейная характеристика $g(x)$ может быть конкретизирована при использовании различных функций, обладающих падающим участком. В работе [2], например, использовалась кубичная

аппроксимация. Еще проще аппроксимировать характеристику нелинейного элемента с помощью круговой функции. При этом система (1) ведет себя как обычное спусковое устройство, в котором автоколебания невозможны. В такой системе имеются две особые точки типа устойчивых фокусов, определяющие устойчивые состояния. Они разделены сепаратрисой, проходящей через седло.

Как выяснено, колебания при использовании системы (1) могут быть возбуждены, причем хаотические, если задать определенный алгоритм обратной связи. Уравнения образующейся таким образом новой системы могут быть получены при использовании внешнего гармонического сигнала $f(t)$, заданного условиями коммутации. В этом случае при аппроксимации нелинейности $g(x)$ с помощью круговой функции будем иметь

$$\begin{aligned} dx/dt &= y + \mu \operatorname{arctg}(x), \\ dy/dt &= -\delta(x + y) + f(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$f(t) = \begin{cases} ax \cos(\omega_0 t), & \text{если } x > c, \\ bx \cos(\omega_0 t), & \text{если } x < d. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь μ , a , b , c , d — положительные коэффициенты, ω_0 — частота внешнего гармонического сигнала.

Уравнения (2) совместно с условиями (3) определяют математическую модель неавтономно возбуждающейся хаотической системы. В ней присутствует своеобразная обратная связь, так как вводимый сигнал $f(t)$ зависит не только от внешнего воздействия, но и от значения $x(t)$. Условия (3) определяют изменение функции $f(t)$ при достижении значений, заданных этими условиями. При возбуждении хаоса в цифровой технике достаточным является использование модели, описываемой соотношениями (2), (3). Для создания аналоговых хаотических систем на основе триггера необходимы дополнительные, в том числе и экспериментальные, исследования, что выходит за рамки настоящей работы.

Численный анализ проводился методом Рунге–Кутты 4-го порядка при шаге интегрирования по времени t , равном 0.02. Начальные условия для переменных равны 0.1. Параметры триггера и значения коэффициентов в (2), (3) при расчетах определены следующими значениями: $\mu = 2$, $\delta = 1.6$, $\omega_0 = 3$, $a = -1.92$, $b = 2.08$, $c = 1.6$, $d = -1.5$.

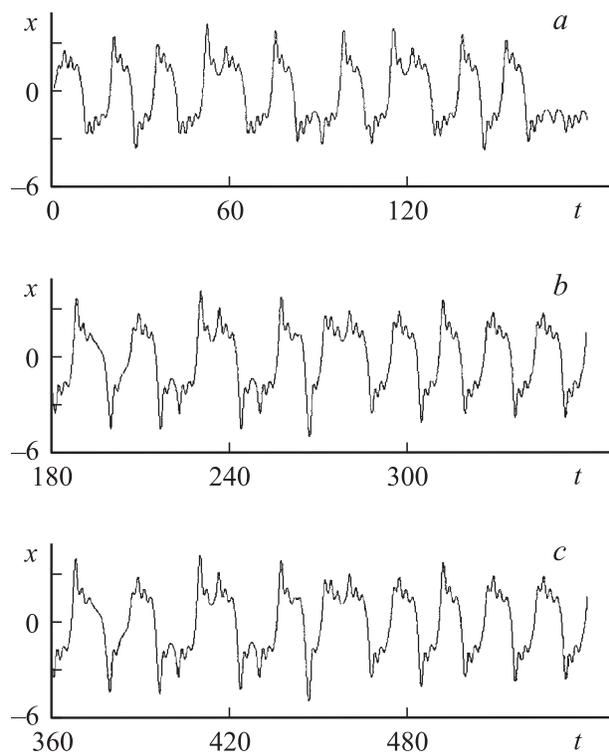


Рис. 1. Фрагменты реализаций колебательного процесса $x(t)$ в интервалах времени $t \in [0, 180]$ (*a*), $t \in [180, 360]$ (*b*), $t \in [360, 540]$ (*c*).

На рис. 1 приведены фрагменты реализаций колебательного процесса $x(t)$, а на рис. 2 — аттрактор (*a*) и спектр мощности S (*b*).

Как видно, в системе, описываемой соотношениями (2), (3), возбуждаются сложные колебания. При этом фрагменты реализаций, аттрактор и спектр мощности свидетельствуют о хаотических движениях.

Колебательный процесс отображает переключение движений между двумя бассейнами притяжения — проявляется бистабильность. Осцилляции являются затухающими. Переключение колебаний нерегулярное; оно происходит между значениями x_1 и x_2 , которые соответствуют осо-

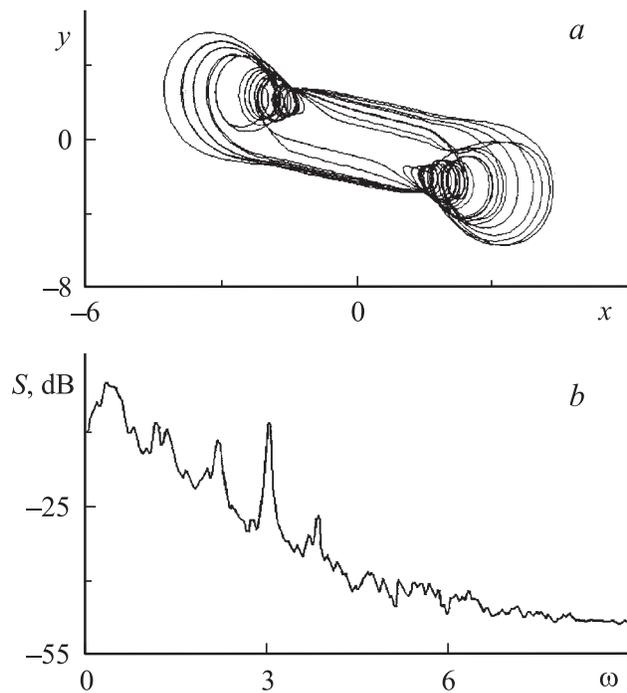


Рис. 2. Фазовый портрет системы в интервале времени $t \in [360, 540]$ (a) и спектр мощности (b).

бым точкам (устойчивым фокусам) триггера при заданных параметрах. При выбранных величинах μ и δ два устойчивых состояния триггера определяются значениями $x_1 = 2.33$, $x_2 = -2.33$.

Хаотический аттрактор имеет структуру, отображающую наличие двух бассейнов притяжения. Он определяется переключением затухающих осцилляций между двумя бассейнами притяжения. Переключение движений при их затухании отличает „бистабильный“ аттрактор, иллюстрируемый рис. 2, a, от известного аттрактора типа „двойной завиток“ [3].

Спектр мощности является непрерывным и отображает хорошее перемешивание фазовых траекторий, хотя и проявляется резонансное

повышение спектральной плотности мощности хаотических колебаний на частоте $\omega = \omega_0 = 3$.

Формирование хаотических движений возможно и с помощью других бистабильных систем. Оно возможно и при использовании передемпфированного осциллятора, применительно к которому в работе [1] исследовался стохастический резонанс. В этом случае уравнение бистабильной системы имеет вид [1,4].

$$dx/dt = x(\alpha - \beta x^2) + f(t). \quad (4)$$

Этим уравнением определяется движение частицы в поле с бистабильным потенциалом при воздействии внешней силы $f(t)$. При этом параметрами α и β характеризуется глубина потенциальных ям.

При гармоническом законе изменения $f(t)$ частица при достаточной амплитуде воздействия периодически переходит из одной потенциальной ямы в другую и обратно. Если же задать функцию $f(t)$ в виде алгоритма хаотизирующей обратной связи, используя соотношение (3), то можно получить хаотическое изменение $x(t)$. Хаотизация колебаний при совместном решении (3) и (4) происходит, например, при следующих значениях параметров: $\alpha = 1$, $\beta = 0.2$, $a = -4.3$, $b = 4.5$, $c = 1.6$, $d = -1.4$, $\omega_0 = 3$. В этом случае характеристический показатель Ляпунова становится положительным, равным $\lambda = 0.48$. В реализациях хаотических колебаний наблюдаются нерегулярные во времени возвраты Пуанкаре.

Приведенные результаты исследований свидетельствуют о возможности получения хаотических движений в бистабильных системах. Предложенный способ обеспечения хаотизирующей обратной связи открывает перспективы преобразования регулярных колебаний в хаотические при использовании различных бистабильных систем.

Естественным является вопрос о возможности хаотизации колебаний с помощью алгоритма хаотизирующей обратной связи в автоколебательных системах при их регулярных режимах работы. Ответ положительный. Это показано в [5] на примерах автоколебательных систем с инерционностью, работающих в режимах, когда без алгоритма хаотизирующей обратной связи в них возбуждаются лишь квазигармонические колебания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 01-02-17529).

Список литературы

- [1] *Геращенко О.В.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 6. С. 82–86.
- [2] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 6. С. 1–6.
- [3] *Wu C.W., Yang T., Chua L.O.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1996. V. 6. N 6. P. 455–471.
- [4] *Понтрягин Л.С., Андронов А.А., Витт А.А.* // ЖЭТФ. 1933. Т. 3. В. 3. С. 165–175.
- [5] *Кальянов Э.В.* // Нелинейный мир. 2003. Т. 1. № 1–2. С. 45–54.