01

Решение краевых задач электродинамики в областях фрактальной геометрии методом R-функций

© В.Ф. Кравченко, М.А. Басараб

Институт радиотехники и электроники РАН, Москва
E-mail: kravchenko_vf@fromru.com

Поступило в Редакцию 22 мая 2003 г.

Впервые численно-аналитический метод R-функций применен к решению краевых задач электродинамики во фрактальных областях типа „ковер Серпинского" и „остров Коха".

Известно, что граница среды существенно влияет на структуру электромагнитного поля и характер распространения волн, так как вследствие их взаимодействия с поверхностью раздела сред возникают явления полного либо частичного отражения, дифракции и т. п. Один из путей моделирования реальных поверхностей раздела сред заключается в использовании идей фрактальной геометрии [1,2]. В работе впервые рассмотрено применение метода R-функций (RFM) [3] к решению краевых задач электростатики и электродинамики в областях фрактальной геометрии.

Пусть сложная область $\Omega \subset R^2$ с границей $\partial\Omega$ задана в виде комбинации простых областей $\{\Omega_k\}_{k=1}^{m}$ с помощью теоретико-множественных операций пересечения, объединения и дополнения. Если известны неявные уравнения границ этих областей $\{\omega_k(x, y) = 0\}_{k=1}^{m}$, такие что $\omega_k > 0$ при $(x, y) \in \Omega_i$ и $\omega_k < 0$ при $(x, y) \notin \overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, то с помощью RFM возможно построение уравнения границы $\partial\Omega$ $\omega(x, y) = 0$, причем функция ω положительна внутри Ω, отрицательна за ее пределами и равна нулю на $\partial\Omega$. Наиболее распространенной системой R-функций является система $\mathscr{R}_0$, алгебрологические операции которой имеют вид

$$f_1 \wedge f_2 \equiv f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}, \quad f_1 \vee f_2 \equiv -(\overline{f}_1 \wedge \overline{f}_2), \quad \overline{f} \equiv -f. \tag{1}$$

Пусть внутри ограниченной области $\Omega \subset R^2$ необходимо найти решение краевой задачи электростатики (уравнение Пуассона для искомого потенциала u)

$$\Delta u = f \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

или электродинамики (уравнение Гельмгольца для потенциала Герца)

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{3}$$

с граничными условиями Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Решение (2)–(4) будем искать в виде структуры Канторовича [3]

$$u = \omega \sum_{i=0}^{N} c_i \psi_i, \tag{5}$$

где ψ_i — известные базисные функции, а c_i — неопределенные коэффициенты. Рассмотрим решение задач (2)–(4) с помощью структуры (5) в таких областях фрактальной геометрии, как ковер Серпинского и остров Коха [1]. *Ковер Серпинского* строится следующим образом. Исходный квадрат разбивается на 9 равновеликих квадратов, центральный из которых исключается. Далее каждый из оставшихся квадратов подвергается аналогичной процедуре и т. д. Устремляя этот процесс к бесконечности, получаем в итоге фрактальный объект — ковер Серпинского. Его дробная размерность $D = \lg 8/\lg \approx 1.893$. Если бесконечный процесс прервать на k-м шаге, то получим предфрактал k-го уровня. Согласно [4], функция границы предфрактала Серпинского имеет вид

$$\omega_k(x, y) = \begin{cases} \omega_0(x, y), & k = 0, \\ \omega_{k-1}(x, y) \wedge F_k(x, y), & k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{6}$$

$$F_k(x, y) = -3^{-k}\omega_0[6 \arcsin[\sin(3^{k-1}\pi x/2)]/\pi, 6 \arcsin[(3^{k-1}\pi y/2)]/\pi],$$
$$\omega_0(x, y) = [(a^2 - x^2) \wedge (a^2 - y^2)]/2a. \tag{7}$$

На рис. 1, *a* показаны линии уровня функции ω_2 границы предфрактала 2-го уровня ковра Серпинского. *Кривая Коха* строится путем следующей процедуры. Из начального отрезка-основы удаляется средняя

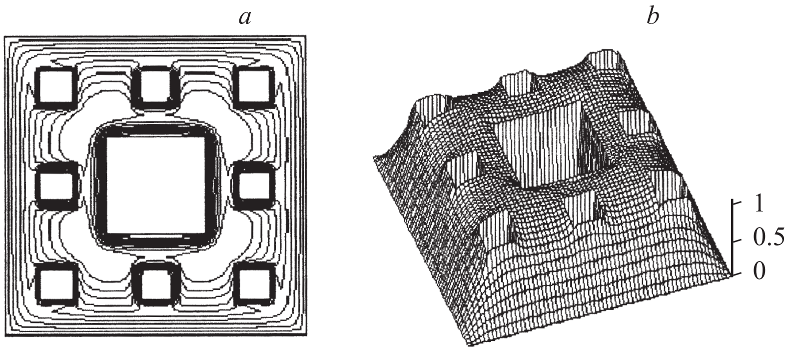

Рис. 1. Линии уровня функции области предфрактала 2-го уровня ковра Серпинского (a) и распределения потенциала задачи (2), (8) (b).

третья часть и заменяется сторонами равностороннего треугольника. Затем такая же процедура применяется ко всем получаемым отрезкам, а предел этих операций и дает кривую Коха с фрактальной размерностью $D = \lg 4/\lg 3 \approx 1.26$. Пусть исходная область есть полуплоскость $y \leqslant 0$. Тогда уравнение ее границы $\omega_0 = -y = 0$. Алгоритм RFM нахождения уравнения предфрактала k-го уровня ($k \geqslant 1$) состоит из двух этапов: 1) R-дизъюнкция функции ω_{k-1} со своим отражением относительно прямой $y = -x\sqrt{3} + 3^{k-1}\sqrt{3}$:

$$\tilde{\omega}_k(x, y) = \omega_{k-1}(x, y) \vee$$
$$\vee\, \omega_{k-1}[(-x - y\sqrt{3} + 3^k)/2, (-x\sqrt{3} + y + 3^{k-1}\sqrt{3})/2];$$

2) R-конъюнкция функции $\tilde{\omega}_k$ со своим отражением относительно прямой $x = 3^k/2$:

$$\omega_k(x, y) = \tilde{\omega}_k(x, y) \wedge \tilde{\omega}_k(3^k - x, y).$$

Кривая Коха, построенная на сторонах равностороннего треугольника, дает геометрический объект, называемый островом (снежинкой) Коха [1]. Уравнение границы острова Коха получается применением трех операций R-конъюнкции к функциям кривых Коха, повернутых

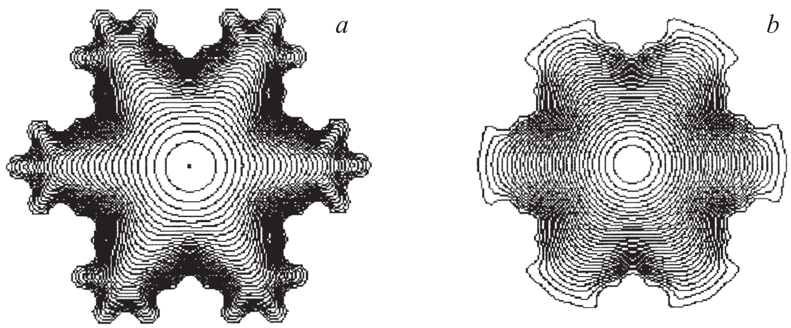

Рис. 2. Линии уровня функции области предфрактала острова Коха 3-го порядка (a) и основного типа волны E_{01} (b).

относительно друг друга на $60°$:

$$W_k(x,y) = \omega_k(y + 3^k/2, x - 3^{k-1}\sqrt{3}/2) \wedge$$
$$\wedge \Big[\omega_k[y - x\sqrt{3} + 3^k)/2, (-x - y\sqrt{3} - 3^{k-1}\sqrt{3})/2] \wedge$$
$$\wedge\, \omega_k[(-y - x\sqrt{3} + 3^k)/2, (-x + y\sqrt{3} - 3^{k-1}\sqrt{3})/2]\Big].$$

На рис. 2, a показаны графики линий уровня функции предфрактала острова Коха 3-го порядка, построенной с помощью R-операций системы $\mathscr{R}_0$ (1).

Можно видеть, что в отличие от фрактальных областей области предфрактальной геометрии имеют кусочно-гладкую границу. Поэтому базисные функции $\omega\psi_i$ структуры Канторовича (5) образуют полную координатную систему [3], обеспечивающую сходимость вариационных и проекционных методов решения краевых задач в таких областях. Вопросы асимптотического поведения решений при стремлении порядка предфрактала к бесконечности подробно рассмотрены в [1].

Пример 1. Решим задачу Дирихле для уравнения Лапласа (2) $(f = 0)$ в области, представляющей собой предфрактал k-го уровня Серпинского. Здесь u — искомый потенциал. Пусть на внешней части границы $\partial\Omega_0$ области Ω задан потенциал f_0, а к внутренним участкам

Таблица 1.

Степень полинома $2M$	Количество функций $N+1$	Равномерная норма разности $u^{(M)}-u^{(M-1)}$	L_2-норма разности $u^{(M)}-u^{(M-1)}$
2	3	0.497	0.367
4	6	0.105	0.087
6	10	0.093	0.125
8	15	0.076	0.104

границы $\partial\Omega' = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_0$ приложен потенциал f', т.е.

$$u = \begin{cases} f_0, & (x, y) \in \partial\Omega_0, \\ f', & (x, y) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{8}$$

Приближенное решение задачи ищется в виде структуры Канторовича

$$u = \omega_k \sum_{i=0}^{N} c_i \psi_i + \frac{f'\omega_0 + f_0\omega'}{\omega_0 + \omega'}, \quad \omega' = \Lambda_{j=1}^{k} F_j.$$

В качестве базисных функций ψ_i выберем двумерные полиномы Лежандра порядка $2M$, ограничившись в силу симметрии лишь четными степенями по обеим переменным:

$$L_{k(i,j)}(x, y) = L_{2i}(ax)L_{2j}(ay), \qquad i + j = \overline{0, M}.$$

Здесь функция расстановки $k(i, j) = (i + j)(i + j + 1)/2 + j$. Неопределенные компоненты c_i структуры решения найдем методом Бубнова–Галеркина. В качестве иллюстрации сходимости в табл. 1 приведены относительные погрешности разности между последовательными приближениями $u^{(M)}$, $u^{(M-1)}$ в равномерной и L_2-нормах. На рис. 1, *b* приведено распределение потенциала в предфрактале 2-го уровня ковра Серпинского для $f_0 = 0$, $f' = 1$, $M = 4$ ($N = 14$).

Пример 2. Решалась задача расчета TM-волн в регулярном волноводе с поперечным сечением в виде предфрактала острова Коха. При этом находились решения (собственные функции) (3) с условиями (4) относительно продольной компоненты электрического поля $u = E_z$, где $\sqrt{\lambda}$ — поперечное волновое число. Структура решения бралась

Таблица 2.

	Собственные числа острова Коха и мажорирующих круговых областей							
ν	2.405	3.832	5.135	5.520	7.016	8.417	8.654	10.174
$R\sqrt{\lambda}$	3.760	5.984	5.987	9.390	9.719	10.573	11.198	13.301
$\nu R/r$	4.166	6.637	8.894	9.561	12.152	14.579	14.989	17.622

в виде (5), где $\omega = W_k$. В качестве базисных использовались полиномы Лежандра порядка M. На рис. 2, b показана структура основного типа колебаний (волна E_{01}) для предфрактала острова Коха 3-го порядка. Во второй строке табл. 2 приведены первые восемь нормированных собственных чисел, полученных при следующих параметрах: порядок предфрактала $K = 3$; вертикальный размер $h = 10$ mm; горизонтальный размер $l = 2h/\sqrt{3} \approx 12$ mm; $M = 3$ $(N = 9)$. В качестве грубой оценки для сравнения в первой и последней строках табл. 2 приведены собственные значения мажорирующих круговых областей радиусами $R = h/\sqrt{3}$ и $r = h/3$ (ν — нули функций Бесселя). Интересно отметить практическое вырождение собственных значений, соответствующих некоторым парам собственных функций. Данный эффект наблюдался при различных параметрах фрактальности K.

На основании результатов численного эксперимента сделан вывод об эффективности применения RFM в случае областей с фрактальной геометрией границ. Предложенный подход может быть распространен на широкий класс других фрактальных объектов и решение внешних задач рассеяния электромагнитных волн на фрактальных структурах.

Список литературы

[1] *Falconer K.* Techniques in Fractal Geometry. New York: John Wiley & Sons, 1997. 256 p.

[2] *Кравченко В.Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М.: Радиотехника, 2003. 512 с.

[3] *Рвачев В.Л.* Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 552 с.

[4] *Басараб М.А., Кравченко В.Ф.* // Электромагнитные волны и электронные системы. 2001. Т. 6. № 6. С. 31–37.