

01

Пространственно-временное поле турбулентных пульсаций

© Л.Н. Пятницкий

Институт высоких температур РАН, Москва
E-mail: pyat7@mail.ru

Поступило в Редакцию 6 июня 2003 г.

На основе волновой модели турбулентности получены соотношения, описывающие пространственно-временное поле пульсаций гидродинамических параметров турбулентного течения. Приведены расчетные данные, описывающие процесс хаотизации пульсационного поля. Результаты расчетов продольных и поперечных пульсаций сопоставляются с результатами измерений этих величин, выполненных Г. Райхардтом.

В работах [1–3] дано экспериментальное обоснование новой концепции турбулентности, рассмотрен механизм турбулентных пульсаций, описаны процессы образования турбулентного пограничного слоя и ламинарного подслоя. Пульсации параметров течения формируются при суперпозиции возмущений, которые возникают у стенки в поле градиента скорости потока в виде центров избыточного давления, и распространяются как волновые пакеты.

В пределах пакета, когда $|l - ct| \leq a$, пульсации скорости u и других параметров заданы функцией $f(r)$ распределения давления в первичном возмущении размером $2a$, а также расстоянием l , пройденным волной до точки наблюдения за время t :

$$u, p, \rho \sim f(l - ct)/l. \quad (1)$$

В ядре течения в суперпозиции участвуют волновые пакеты, по форме близкие к сферической. У стенки, в поле сильного градиента скорости течения, волновой фронт пакетов разрушается, изменяя характер пульсаций. Область разрушения фронта волны интерпретируется как пограничный слой, высота которого определяет характерный размер первичных возмущений. При отражении волны в непосредственной

близости к поверхности стенки пульсации скорости в волновом пакете исчезают, и их энергия передается пульсациям других параметров. Эта область интерпретируется как ламинарный подслой турбулентного пограничного слоя.

В данной работе получены соотношения, описывающие пространственно-временное поле пульсаций гидродинамических параметров и его хаотизацию, приведены результаты расчетов поля продольных и поперечных компонент пульсаций скорости течения в плоском канале, которые сопоставляются с данными измерений, выполненных Г. Райхардтом.

Направление движения пробной точкой волны в поле скорости потока U определяется единичным вектором \mathbf{s} (в геометрической акустике — звуковой луч). Поведение вектора \mathbf{s} описывает уравнение [4]:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dl} = \frac{1}{c} [\text{rot } U, \mathbf{s}]. \quad (2)$$

Направим течение вдоль оси x плоского канала высотой $z = d$ и оценим суммарное изменение ориентации вектора \mathbf{s} в поле скорости $U(z)$, вычисляя полярный ϑ и азимутальный φ направляющие углы вектора \mathbf{s} . После интегрирования (2) получаем ($M = U/c \ll 1$):

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta &= \sqrt{\sin^2 \vartheta_0 + 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + M^2(z)}, \\ \sin \varphi &= \frac{\sin \vartheta_0 \sin \varphi_0}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_0 + 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + M^2(z)}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решение (3) представляет направляющие углы $\{\vartheta, \varphi\}$ вектора \mathbf{s} как функцию его начальной ориентации $\{\vartheta_0, \varphi_0\}$, координаты z и распределения $M(z)$. Зная ориентацию $\{\vartheta, \varphi\}$ вектора \mathbf{s} , можно вычислить траекторию пробной точки волны в канале. Для этого вначале найдем координаты пробной точки $\{\xi, \eta, \xi\}$ в зависимости от пройденного пути l при движении волны в полупространстве над верхней стенкой. В соответствии с (3) положение точки относительно центра волны

дается системой параметрических дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dl} &= \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + M(z); \\ \frac{d\eta}{dl} &= \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0; \\ \frac{d\xi}{dl} &= \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 - M^2(z)}; \\ \xi(0) &= \eta(0) = \xi(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При описании конфигурации волны в координатах $\{x, y, z\}$, связанных с каналом, примем во внимание, что возмущение может возникать в произвольной точке $\mathbf{rp}\{x_p, y_p, z_p\}$ на любой стенке и с задержкой tp относительно $t = 0$. Используем безразмерные переменные, представив расстояние в долях высоты канала d , а время в масштабе c/d . Тогда число n отражений волны от стенок можно выразить через ординату ξ : $n = \text{In}(\xi)$, где In — операция взятия целого числа, а систему уравнений (4) переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_p + \int_0^{l-tp} (\sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 + M(z)) dl, \\ y &= y_p + \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0 (l - tp), \\ z &= z_p + \int_0^{l-tp} \left(\sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 - M^2(z)} \right. \\ &\quad \left. - 2 \text{In} \left[\frac{n+1}{2} (-1)^{n+z_p} \right] \right) dl, \\ n &= \text{In} \left[(l - tp) \sqrt{\cos^2 \vartheta_0 - 2M(z) \sin \vartheta_0 \cos \varphi_0 - M^2(z)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Когда параметры \mathbf{rp} и tp являются последовательностями, совместное решение (5) и (1) дает пространственно-временное поле пульсаций параметров течения в канале. Ослабление волны при ее отражении от стенок учитывается в (1) коэффициентом $(1 - \alpha)^n$. Современные математические пакеты, такие как Mathematica 4, позволяют вычислить это поле.

Возмущения скорости потока волной демонстрируют два верхних кадра анимации процесса на рис. 1, где фронт волны и векторы пульсаций скорости для $l = 0.2$ и 2.2 показаны в плоскости $y = 0$. Пространство за пределами канала затенено. Длина вектора скорости соответствует амплитуде пульсаций. По мере распространения волны амплитуда постепенно убывает, а пространственно-временное поле остается детерминированным и вполне регулярным.

На начальной стадии распространения семи волн (кадр $l = 0.3$, волновые фронты здесь не показаны) регулярность поля возмущений еще сохраняется. Но при $l = 2.2$ пульсации выглядят как хаотические. Анализ спектров указывает на стохастический характер пульсаций, которые становятся случайными только для случайных последовательностей параметров $\mathbf{r}p$ и tp .

Согласно (3), в поле $M(z)$ траектория вектора \mathbf{s} отклоняется от прямой линии. Отклонение зависит от расстояния l , которое он проходит в слое сильного градиента скорости толщиной δ . В направлении больших углов ϑ_0 , у стенки канала, это расстояние быстро растет с увеличением угла: $l_0 = \delta / \cos \vartheta_0$. Отклонение траектории от прямой резко усиливает этот рост $l > l_0$. В результате отношение продольной компоненты пульсаций к поперечной u_x/u_z должно возрастать по мере приближения к зоне пограничного слоя.

Именно эта тенденция наблюдалась Г. Райхардтом [5] при изучении течений в канале и П.С. Клебановым [6] в экспериментах с пластинкой (см. также [7, гл. 18]). Так, Г. Райхардт измерял турбулентные пульсации в воздушном потоке в канале шириной 1 м и высотой 24.4 см. При числе Маха $M_0 = 0.003$ (скорость течения $U_0 = 100$ см/с) число Рейнольдса превышало 10^4 . Распределения измеренных квадратичных средних продольных $\sqrt{u^2}$ и поперечных $\sqrt{w^2}$ пульсаций приведены на рис. 2 для половины ширины канала. На графике они представлены в виде отношения к максимальному значению продольных пульсаций $(\sqrt{u^2})_{\max}$.

Измерения показывают, что поперечная компонента пульсаций сравнительно слабо зависит от z , тогда как продольная компонента имеет на расстоянии $\delta \approx 0.03$ от стенки резко выраженный максимум. Этот результат, до сих пор не получивший должного объяснения, естественным образом интерпретируется на основе волнового механизма турбулентности. Более того, в рамках этого механизма имеется возможность количественно описать компоненты пульсаций.

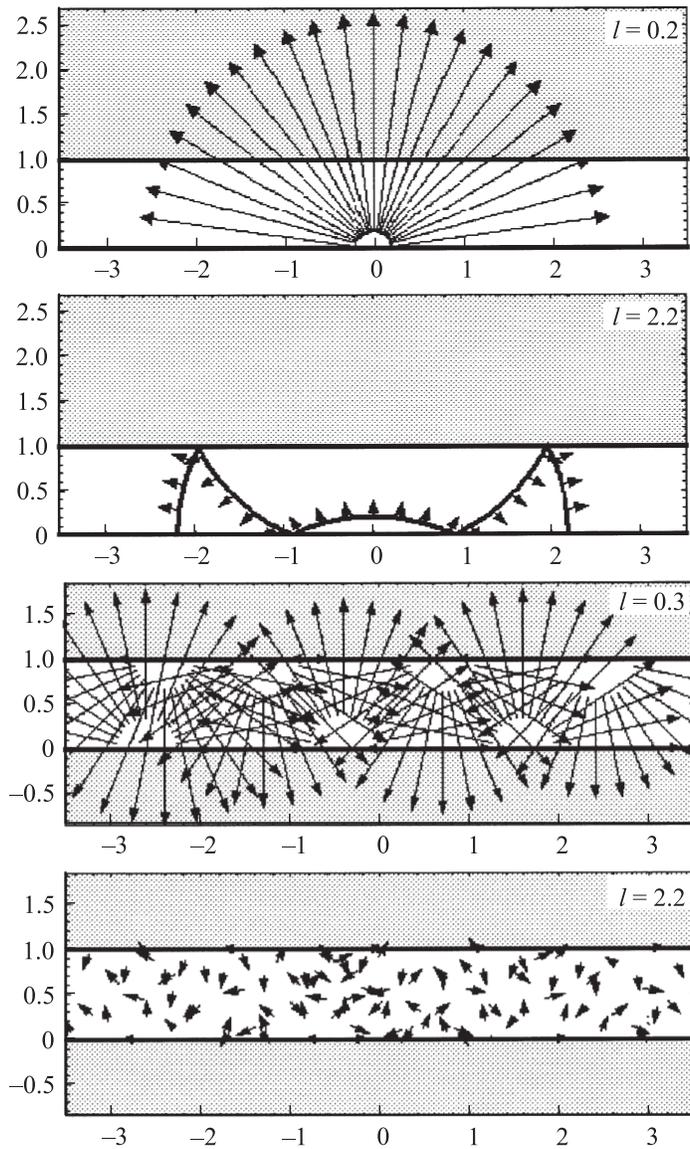


Рис. 1. Поле пульсаций скорости в плоскости $y = 0$ для разных значений l .

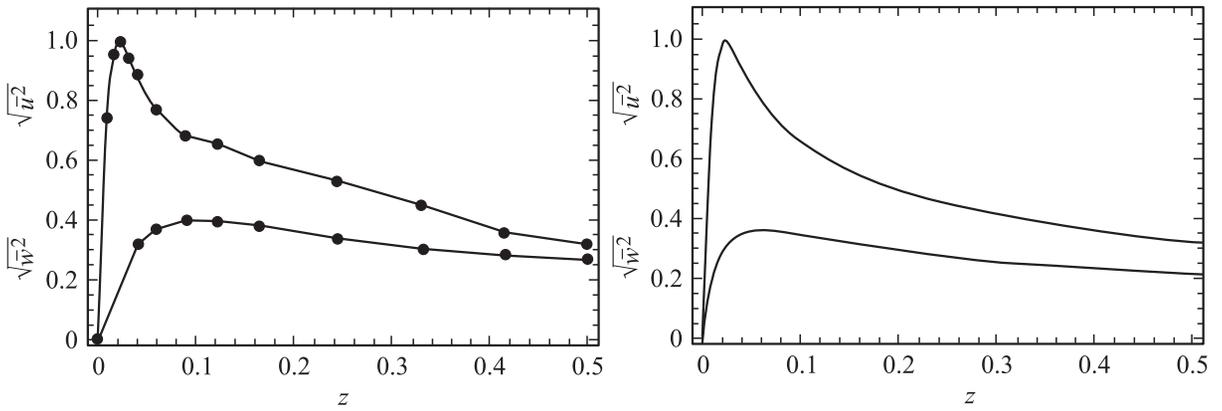


Рис. 2. Изменения продольных $\sqrt{u^2}$ и поперечных $\sqrt{w^2}$ пульсаций скорости в канале: слева — эксперимент Г. Райхардта; справа — расчет пульсаций по упрощенной схеме.

Используя соотношения (1), найдем компоненты пульсаций скорости:

$$u \sim f \left(\frac{l_n - l}{a} \right) \sin(\vartheta)/l, \quad w \sim f \left(\frac{l_n - l}{a} \right) \cos(\vartheta)/l. \quad (6)$$

Здесь l — пройденное волной расстояние, l_n — расстояние до точки наблюдения, ϑ — угол наклона луча в этой точке, $a = \delta$ — характерный размер первичного возмущения. Значения компонент пульсаций можно рассчитать, решая систему уравнений (5) и (6). Но в целях демонстрации метода получим для компонент аналитические выражения, несколько упростив схему расчета.

Для этого дуговые траектории векторов \mathbf{s} , приходящие в точку наблюдения $\{x = 0, z\}$ из центров возмущения $x\rho$, заменим прямыми, соединяющими эти точки. Распределение $x\rho$ считаем равномерным вдоль x , а локализацию исходных возмущений ограничим зоной $x\rho \in [-10, 10]$. Вне этой зоны амплитуда пульсаций скорости уменьшается более чем в $(x\rho/\delta) = 330$ раз, и ими можно пренебречь. Тогда зависимость среднеквадратичных значений компонент пульсаций от координаты z найдем, выражая входящие в соотношения (6) величины через $x\rho$ и z :

$$\begin{aligned} \sqrt{\overline{u^2}} &\sim \sqrt{2 \int_0^{10} \left(\frac{(1 + \varepsilon)x\rho}{x\rho^2 + (z + a)^2} \right)^2 d(x\rho)}, \\ \sqrt{\overline{w^2}} &\sim \sqrt{2 \int_0^{10} \left(\frac{(1 - \varepsilon)x\rho}{x\rho^2 + (x + a)^2} \right)^2 d(x\rho)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь коэффициент ε введен для компенсации искажения вкладов в пульсации за счет изгиба траекторий. Параметр a в знаменателе учитывает тот факт, что формулы (6) справедливы только вне пограничного слоя, и при интегрировании уравнений (5) следует полагать $z > a$. При построении графиков учтено, что в объеме первичного возмущения поле скоростей находится с помощью функции Грина краевой задачи для волнового уравнения, когда амплитуда пульсаций падает от ее наибольшего значения при $z = 0$ до нуля при $z = l = 0$.

Компоненты пульсаций, найденные по формулам (7), представлены на рис. 2 справа. В расчетах принято значение коэффициента $\varepsilon = 0.2$. Сопоставляя графики рис. 2, заключаем, что модельные зависимости вполне удовлетворительно описывают результаты измерений.

В эксперименте Г. Райхардта отношение u/U составляло 10^{-4} . В звуковой волне пульсации скорости u и давления p связаны между собой соотношением $u/c = p/p_0$ [4], откуда $p/p_0 \approx 10^{-4}$. Тогда для воздуха атмосферного давления ($p_0 \sim 10^5$ Па) находим $p \approx 10$ Па (~ 0.1 mm Hg). Полученные значения $u \sim 5$ см/с и $p \approx 10$ Па не являются сколько-нибудь экзотическими. Звуковые волны с пульсациями такого уровня создаются человеческим голосом, что лишний раз подтверждает роль звуковых волн в формировании пульсаций турбулентного течения.

Список литературы

- [1] Пятницкий Л.Н. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. В. 1. С. 191–203.
- [2] Пятницкий Л.Н. // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. В. 4. С. 665–684.
- [3] Пятницкий Л.Н. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 9. С. 9–17.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
- [5] Reichardt H. Messungen turbulenter Schwankungen. Naturwissenschaften 404. 1938.
- [6] Klebanoff P.S. Characteristics of turbulence in boundary layer with zero preecure gradient. NASA. Rep. 1247. 1955.
- [7] Schlichting H. Grenzschicht-Theorie. V.G. Braun. Karlsruhe, 1960 (Пер. с нем.: Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969).