

01;03;04

## **Об одном точном аналитическом решении обратной задачи расширения цилиндрического плазменного поршня в сжимаемой среде**

© В.С. Крутиков

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев

*В окончательной редакции 10 июня 2003 г.*

Методом обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов впервые получено точное аналитическое решение волнового уравнения цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами. Решения универсальны, пригодны для обратных и прямых задач при произвольных величинах начального радиуса и перемещений. Решения описывают ближнее поле расширяющегося плазменного поршня, в том числе и самые первые, начальные мгновения импульсного процесса. Они обеспечивают точные значения заданного профиля волны давления и скорости в фиксированной точке волновой зоны в момент появления, а также конкретные конечные значения их на подвижной границе плазменного поршня в моменты времени, стремящиеся к нулю. Проведен учет нелинейных дополнительных условий.

Обычно при моделировании пробоя межэлектродного промежутка (что является отдельной сложной проблемой) и, как правило, численной реализации расширения плазменного поршня, в начальный момент времени плазменный канал с радиусом  $r_0$  и температурой  $T_0$  полагается сформированным. Исходя из экспериментальных данных величины  $r_0$  и  $T_0$  принимают в определенном диапазоне изменения для импульсных процессов в воздухе [1–3] и в воде [4,5]. Варьирование начальных условий в диапазоне разброса их экспериментально определенных значений оказывает несущественное влияние на результаты расчетов. Решения быстро выходят на близкие режимы.

Однако, как следует отметить, при этом из возможного рассмотрения исключаются изменения исследуемых функций давления, скорости частиц и так далее в самые первые мгновения процесса, без которых невозможно, например, осмысление и моделирование пробоя

межэлектродного промежутка и многих других физических процессов предпробойной и пробойной стадии.

В настоящей работе делается попытка количественной оценки кинематических и динамических параметров расширяющегося цилиндрического плазменного поршня в сжимаемой среде, в том числе и в самые первые, начальные мгновения импульсного процесса.

Ранее [6,7] были получены аналитические решения для волнового уравнения в областях с подвижными границами для общего случая. При задании в точке волновой зоны дополнительного условия в классе функций Бесселя (в изображениях) при решении обратных задач получены точные аналитические решения, которые обладают особенностями в точке  $r_1$  волновой зоны и на подвижной границе при  $t \rightarrow 0$ . Чрезвычайная сложность получения точных аналитических решений волновых задач с подвижными границами цилиндрической симметрии приводила к необходимости использования приближенных способов раскрытия этих математических неопределенностей [8,9]. Здесь будет предпринята попытка точного аналитического решения указанных вопросов.

Волновое уравнение цилиндрической симметрии имеет вид

$$\varphi_{tt} - a^2 \varphi_{rr} - a^2 r^{-1} \varphi_r = 0. \quad (1)$$

Начальные условия полагаем нулевыми. Здесь  $\varphi$  — потенциал скорости,  $r$  — координата,  $t$  — время,  $a$  — скорость распространения возмущений в невозмущенной жидкости. Применяя одностороннее преобразование Лапласа, получаем операторное уравнение

$$r \bar{\varphi}_{rr}(r, s) + \bar{\varphi}_r(r, s) - \frac{s^2}{a^2} r \bar{\varphi}(r, s) = 0. \quad (2)$$

Производим замену переменных в (2)  $x = \frac{s}{a} r$ , получаем

$$\Phi_{xx} + \frac{1}{x} \Phi_x - \Phi = 0,$$

решением которого будет

$$\Phi = C_1 I_0 \left( \frac{s}{a} r \right) + C_2 K_0 \left( \frac{s}{a} r \right), \quad (3)$$

где  $I_0$ ,  $K_0$ ,  $K_1$  — модифицированные функции Бесселя.

Для безграничной среды  $C_1 = 0$ , поскольку исследуемые функции при  $r \rightarrow \infty$  должны быть ограниченными, получаем для случая задания в фиксированной точке волновой зоны произвольной функции давления  $P(r_1, t) = f(r_1, t)$  (обратная задача) [4]:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= -\frac{\bar{f}(r_1, s)K_0(\mu, r)}{s\rho K_0(\mu, r_1)}, & \bar{\varphi}_r &= \frac{\bar{f}(r_1, s)K_1(\mu, r)}{a\rho K_0(\mu, r_1)}, \\ s\bar{\varphi} &= -\frac{\bar{f}(r_1, s)K_0(\mu, r)}{\rho K_0(\mu, r_1)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu = s/a$ ,  $s$  — параметр преобразования,  $P = -\rho\varphi_t$ ,  $v = -\varphi_r$ ,  $\rho$  — плотность. Переход к оригиналам в [4] может быть осуществлен рациональным способом в каждом конкретном случае в зависимости от формы функции  $f$ .

При задании в точке волновой зоны функции давления в изображениях в классе функций Бесселя необходимо учесть сразу два обстоятельства. Первое: учесть величину начального радиуса  $r_0$ , т.е. тот факт, что время появления волны в точке  $r_1$  будет определяться с учетом  $r_0$ . Второе: функции давления и скорости должны быть ограниченными, т.е. иметь конечные значения в любые моменты времени. Тогда дополнительное условие для обратной задачи будет иметь вид

$$P(r_1, t) = \frac{A}{\sqrt{\left(t + \alpha + \frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_1^2}{a^2}}}.$$

Опуская выкладки, в принципе подобные приведенным в [7], получим окончательные формулы. Значения исследуемых функций в любых точках таковы:

$$P(r, t) = \frac{A}{\omega}, \quad v(r, t) = \frac{A(t + \beta)}{r\rho\omega}, \quad \omega = \sqrt{(t + \beta)^2 - \frac{r^2}{a^2}}. \quad (5)$$

На подвижной границе

$$P(R(t), t) = \frac{A}{\omega} - \frac{1}{2}\rho v^2(R(t), t), \quad v(R(t), t) = \frac{A(t + \beta)}{R(t)\rho\omega}, \quad (6)$$

$$R(t) = \left\{ r_0^2 + \frac{2A}{\rho} [\omega - \omega_1] + \frac{2A^2}{\rho^2 a^2} \left[ \ln \left| \omega - \frac{A}{\rho a^2} \right| - \ln \left| \omega_1 - \frac{A}{a^2 \rho} \right| \right] \right\}^{1/2}, \quad (7)$$

где

$$\omega = \sqrt{(t + \beta)^2 - \frac{R^2(t)}{a^2}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\beta^2 - \frac{r_0^2}{a^2}},$$

$$\beta = \alpha + \frac{r_0}{a}, \quad A, a, \rho, r_0, \alpha = \text{const.}$$

При  $t \rightarrow 0$

$$P(R(t), t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\alpha + \frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}} - \frac{1}{2} \rho v^2(R(t), t), \quad (8)$$

$$t \rightarrow 0 \quad v(R(t), t) = \frac{A \left(\alpha + \frac{r_0}{a}\right)}{r_0 \rho \sqrt{\left(\alpha + \frac{r_0}{a}\right)^2 - \frac{r_0^2}{a^2}}}, \quad (9)$$

$$\text{при } a \rightarrow \infty \quad R(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2At}{\rho}}. \quad (10)$$

Формулы (5)–(10) при  $\alpha$  и  $r_0 \rightarrow 0$  переходят в полученные ранее (8)–(10) [7]. Вычисление  $R(t)$  из (7) производится как в [7,11], хорошим приближением, как правило, является формула (10) при  $a \rightarrow \infty$ . Приведенные точные аналитические решения обратной и прямой задач обеспечивают точные значения заданного профиля давления  $P$  или скорости  $v$  в фиксированной точке  $r_1$  волновой зоны в момент появления, а также конкретные конечные величины  $P(R(t), t)$  и  $v(R(t), t)$  на подвижной границе плазменного поршня при  $t \rightarrow 0$  в начале движения.

Для случая произвольных законов изменения скорости движения границы плазменного поршня и вида функции  $P(r_1, t) = f(r_1, t)$  соответствующие решения представлены в [6,7].

Соотношение (7) наглядно показывает, сколь существенно нелинейна связь между законом движения границы и исследуемыми функциями. Определить эту связь точно (7) и в общем случае [7] удастся только на пути решения обратных задач с учетом взаимодействия нелинейных аргументов [11].

Нелинейные дополнительные условия

$$P(r_1, t) = -\rho \left( \varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_r^2 \right). \quad (11)$$

Это дополнительное условие (11) используется в тех случаях, например, когда требуется обеспечить заданную форму функции давления вблизи или на движущейся поверхности. При этом скорости частиц среды соизмеримы или равны скорости подвижной границы и пренебрегать нелинейным членом интеграла Коши–Лагранжа нельзя [10,11].

Из (11) с учетом (5) получаем

$$A^2 a - Ab + c = 0, \quad (12)$$

где  $a = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{t + \beta}{r \rho \omega} \right)^2$ ;  $b = \frac{1}{\omega}$ ;  $c = P(r_1, t)$ .

Зная  $P(r_1, t)$ ,  $\rho$ ,  $r_1$ ,  $\beta$ , можно из квадратного уравнения (12) определить  $A$ . По (5)–(7) и известному  $A$  определяем значения функций в других точках и на подвижной границе.

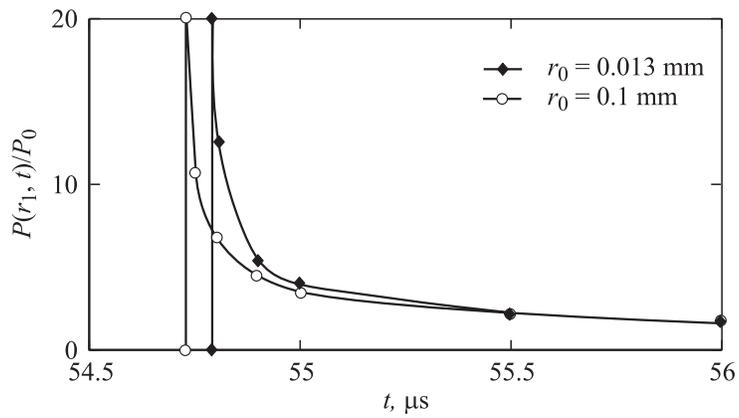
Эти точные аналитические решения обратной задачи с подвижными границами и нелинейными условиями имеют важное научное и прикладное значение. Они могут служить для оценок, в том числе и при определении максимальных значений (скачков) исследуемых функций.

В работе [12] приведены замечания относительно того, что раскрытие неопределенностей в решениях уравнения (1) при задании  $P(r_1, t)$  в классе функций Бесселя (в изображениях) [8,9] проделано приближенными способами. Как видим, полученные впервые точные аналитические решения обратной и прямой волновых задач цилиндрической симметрии в областях с подвижными границами и нелинейными дополнительными условиями приводят к тому, что эти замечания теряют смысл.

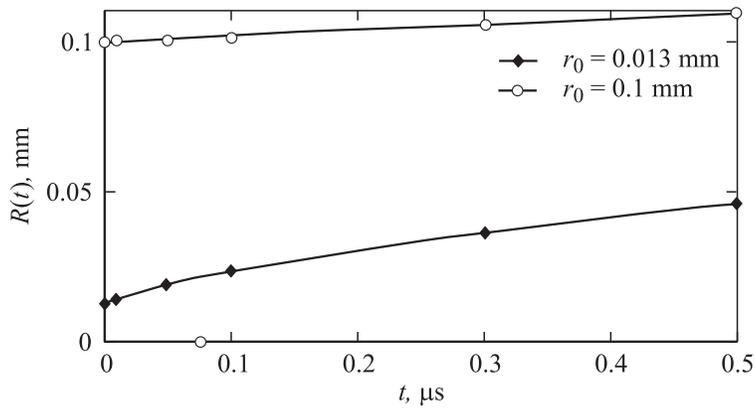
На рис. 1–4 показаны результаты вычислений по формулам (5)–(10) при  $A = 20 \cdot 10^6 \text{ kgf} \cdot \text{s}/\text{cm}^2$ ,  $\rho = 102 \text{ kgf} \cdot \text{s}/\text{m}^4$ ,  $a = 1460 \text{ m/s}$  и двух значениях величин начального радиуса  $r_0 = 0.013, 0.1 \text{ mm}$ ;  $r_1 = 0.08 \text{ m}$ , значения давлений и скоростей при  $t \rightarrow 0$  на подвижной границе плазменной полости определялись по формулам (8), (9). Величина  $\alpha$  определяется из следующего соотношения:

$$1 \cdot 10^{-6} = \sqrt{\left( t^0 + \alpha + \frac{r_0}{a} \right)^2 - \frac{r_1^2}{a^2}},$$

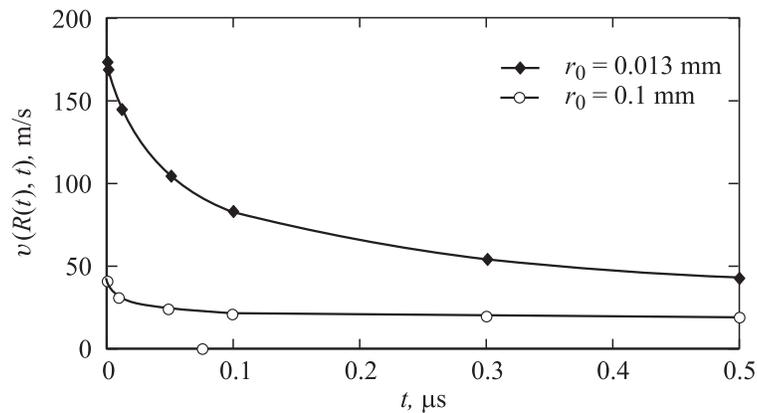
где  $t^0$  — время прихода волны в точку  $r_1$ :  $t^0 = \frac{r_1 - r_0}{a}$ .



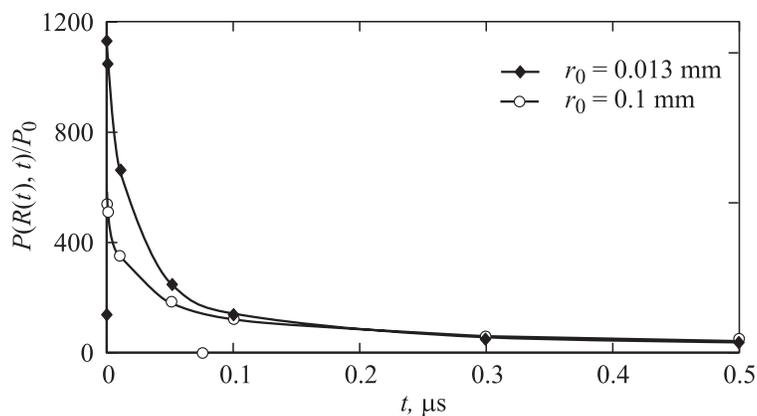
**Рис. 1.** Исходные для реконструкции изменения давления в точке волновой зоны в зависимости от времени для двух значений величин начального радиуса.



**Рис. 2.** Восстановление законов изменения радиуса подвижной границы плазменного поршня в зависимости от времени для различных величин начального радиуса.



**Рис. 3.** Восстановление законов изменения скорости подвижной границы в зависимости от времени для различных величин начального радиуса.



**Рис. 4.** Реконструкция законов изменения давления на подвижной границе плазменного поршня с учетом нелинейного члена интеграла Коши–Лагранжа [12] в зависимости от времени для различных значений начального радиуса по заданному давлению в точке волновой зоны рис. 1.

Как видим, на рис. 3,4 в начальные мгновения  $t = 0 \div 0.1 \mu\text{s}$  импульсного процесса значения давления и скорости на подвижной границе плазменного поршня, во-первых, существенно отличаются, в некоторых случаях почти на порядок от значений для времен  $t > 0.1 \mu\text{s}$ ; во-вторых,  $P(R(t), t)$  и  $v(R(t), t)$  существенно зависят от величины начального радиуса  $r_0$ ; давление и скорости в начальные мгновения могут в несколько раз отличаться для разных значений  $r_0$ . При  $t > 0.1 \mu\text{s}$  давление на подвижной границе практически не зависит от величины начального радиуса  $r_0$  для принятых значений. Хотя значения скорости  $v(R(t), t)$  при  $t = 0.5 \mu\text{s}$  еще различаются почти в два раза для данных значений  $r_0$ . Полученные результаты могут быть использованы при исследовании ближней зоны расширяющейся границы плазменной полости, решении вопросов управления импульсными процессами, моделировании пробоя межэлектродного промежутка, изучении плазмы канала и влиянии величины начального радиуса на исследуемые функции.

## Список литературы

- [1] Басов Н.Г., Борович Б.П., Стойлов В.С. и др. // ЖТФ. 1970. Т. 40. В. 3. С. 516–522.
- [2] Александров А.Ф., Зосимов В.В., Курдюмов С.П. и др. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. № 5. С. 1841–1855.
- [3] Дубовенко В.К. // Электронная обработка материалов. 1990. № 2 (152). С. 62–65.
- [4] Наугольных К.А., Рой Н.А. Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1971. 151 с.
- [5] Лямшев Л.М. // Успехи физических наук. 1987. Т. 151. № 3. С. 479–527.
- [6] Крутиков В.С. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 6. С. 510–514.
- [7] Крутиков В.С. // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 755–758.
- [8] Крутиков В.С., Лопатнев А.Г. // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 14. С. 34–41.
- [9] Крутиков В.С., Лопатнев А.Г. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 17. С. 17–21.
- [10] Слепян Л.И. // Докл. РАН. 1985. Т. 282. № 4. С. 809–813.
- [11] Крутиков В.С. // Акустический журнал. 1996. Т. 42. № 4. С. 534–540.
- [12] Вовченко А.И., Ковалев В.Г., Поздеев В.А. // Прикладная гидромеханика. 2001. Т. 3 (45). № 3. С. 19–25.