

01;09

## **К вопросу о зависимости длительности переходного процесса от точности ее определения в динамических системах, демонстрирующих квазипериодическое поведение**

© А.А. Короновский

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
ГосУНЦ „Колледж“  
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru

*Поступило в Редакцию 10 апреля 2003 г.*

Описывается методика определения длительности переходного процесса для динамических систем, демонстрирующих квазипериодическую динамику. Получено аналитическое выражение, связывающее среднюю длительность переходного процесса с точностью ее определения.

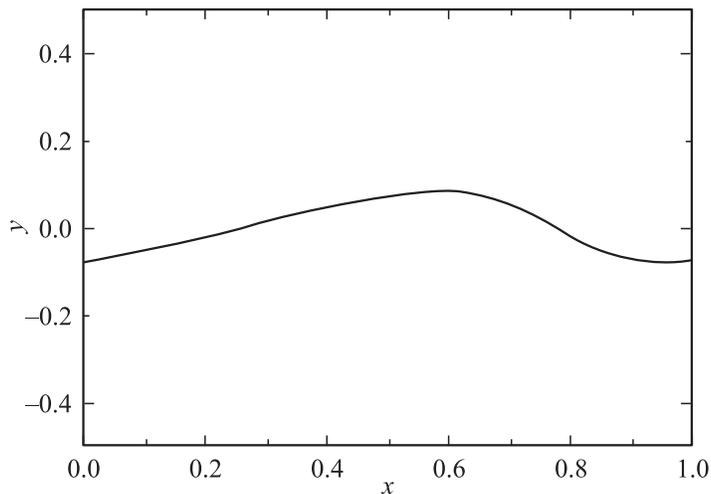
В любой временной реализации, порождаемой динамической системой, можно выделить начальный интервал времени, называемый переходным процессом, в течение которого поведение системы отличается от того, которое будет свойственно этой системе при  $t \rightarrow \infty$ . Как правило, этот интервал времени оказывается очень незначительным (он может равняться нескольким единицам (десяткам единиц) характерных временных масштабов системы) и не принимается во внимание исследователями, основное внимание которых сосредоточивается на асимптотических (установившихся) режимах. В то же самое время в ряде случаев переходный процесс представляет интерес для исследователей, причем причины этого могут быть весьма различны. Во-первых, в ряде случаев из анализа переходного процесса может быть извлечена важная информация о самой системе и ее динамике (например, при восстановлении динамической системы по ее временной реализации [1,2]), тогда как из анализа установившегося режима подобную информацию извлечь не удастся. Во-вторых, переходный процесс может быть очень длительным [3,4], и тогда он является неотъемлемой частью динамики системы. Более того, в случаях, когда динамическая система является

моделью реальной физической системы, работающей в импульсном режиме, вся динамика системы является переходным процессом. Наконец, переходный процесс может представлять интерес как физическое явление, подчиняющееся определенным закономерностям [5,6]. Так, например, переходный хаос (transient chaos), привлекающий большое внимание исследователей (см. работы [7–12] и список литературы к ним) является по своей сути переходным процессом.

Таким образом, переходные процессы в динамических системах несут определенную информацию о ней и подчиняются ряду определенных закономерностей. Поскольку с формальной точки зрения изображающая точка в фазовом пространстве динамической системы за конечный интервал времени никогда не достигает аттрактора, а лишь асимптотически стремится к нему при  $t \rightarrow \infty$ , то длительность переходного процесса зависит от точности  $\varepsilon$  определения момента времени, когда переходный процесс считается завершенным. Для случаев, когда динамическая система демонстрирует периодическое поведение, на примере отображений разработана методика определения длительности переходного процесса, найдена зависимость этой длительности от характеристик аттрактора, точности определения длительности переходного процесса и начальных условий, выявлены механизмы, ответственные за усложнение вида этой зависимости [13–16]. Все вышеназванные результаты могут быть применены и к динамическим системам с непрерывным временем в силу того, что потоковые системы с помощью метода сечения Пуанкаре могут быть сведены к отображениям [17–20] с размерностью на единицу меньше, нежели исходная динамическая система.

В том случае когда поведение системы нерегулярно (в ней реализуются квазипериодические или хаотические колебания), ситуация усложняется, поскольку число точек аттрактора (для потоковой системы соответственно число точек в сечении Пуанкаре) становится бесконечным [21,22]. Целью настоящей работы является рассмотрение переходных процессов для динамических систем, находящихся в режиме квазипериодических колебаний. В качестве объекта исследования выбрана двумерная динамическая система с дискретным временем, известная как отображение Заславского [23–26]

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Omega + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n) + dy_n, \quad \text{mod } 1, \\ y_{n+1} &= dy_n + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n). \end{aligned} \quad (1)$$



**Рис. 1.** Квазипериодический аттрактор на плоскости начальных условий  $(x_0, y_0)$  отображения Заславского (1) для значений управляющих параметров  $d = 0.3$ ,  $k = 0.5$ ,  $\Omega = 0.22$ .

Значения управляющих параметров  $d = 0.3$ ,  $k = 0.5$ ,  $\Omega = 0.22$  выбраны таким образом, что в системе реализуются квазипериодические колебания. На рис. 1 приведен вид фазового портрета системы (1) для указанного набора значений управляющих параметров.

Методика определения длительности переходного процесса аналогична случаю, когда система находится в хаотическом режиме колебаний [22]: область начальных условий, где расположен аттрактор, покрывается сеткой с шагом  $\varepsilon$ . Отображение 1 итерируется с начальным условием  $(x_0, y_0)$ , лежащим в бассейне притяжения аттрактора, достаточно большое число раз  $M$ , заведомо большее, чем максимальная длительность переходного процесса  $T_{\max}$ . После  $M$  итераций,<sup>1</sup> когда переходный процесс завершен с высокой степенью точности, начинается фиксирование ячеек, в которые попала изображающая точка в процессе итерирования. Ячейки, покрывающие точки аттрактора, будем называть ячейками аттрактора [22]. Процесс итерирования отображения

<sup>1</sup> В работе полагалось  $M = 10^4$ .

осуществляется достаточно долго, чтобы как можно большее количество точек аттрактора было покрыто ячейками. После завершения процесса итерирования получается „опорный“ массив ячеек аттрактора. Зная, какие ячейки принадлежат аттрактору, длительность переходного процесса можно определить следующим образом: если начальная точка  $(x_0, y_0)$  в процессе итерирования после  $K$  единиц дискретного времени „попала“ в ячейку аттрактора, то для данного начального условия длительность переходного процесса, определенная с точностью  $\varepsilon$ , считается равной  $K$ . Очевидно, что для корректного определения длительности переходного процесса желательно найти как можно большее количество ячеек аттрактора, причем число итераций  $T_\varepsilon$  необходимых для полного покрытия аттрактора (время покрытия аттрактора), существенно зависит от точности определения переходного процесса  $\varepsilon$ .

Рассмотрим, как зависит длительность переходного процесса  $T(\varepsilon)$ , определяемая при одних и тех же значениях управляющих параметров и начальных условиях от точности  $\varepsilon$  ее определения.

Для одномерных отображений, находящихся в периодических режимах [16], было предложено соотношение, связывающее длительность переходного процесса с точностью ее определения  $\varepsilon$  и мультипликативным коэффициентом устойчивого цикла

$$T_\varepsilon(x_0) = T_{\varepsilon_1}(x_0) + \tau \times \log_{|\mu|} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \right), \quad (2)$$

где  $T_\varepsilon(x_0)$  и  $T_{\varepsilon_1}(x_0)$  — длительности переходного процесса, определенные для одних и тех же значений управляющих параметров и начальных условий  $x_0$  с различной точностью (соответственно  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$ ),  $\tau$  — период колебаний ( $\tau = 1$  для неподвижной устойчивой точки,  $2$  — для цикла периода два и т.п.). Величина  $\mu$  — мультипликатор устойчивого цикла, определяемая как произведение производных функций  $f(x)$ , вычисленных в точках  $x_i^0$  ( $i = \overline{1, \dots, \tau}$ ) устойчивого цикла

$$\mu = \prod_{i=1}^{\tau} f'(x_i^0). \quad (3)$$

В силу устойчивости  $\tau$ -цикла его мультипликатор  $\mu$  должен быть по абсолютной величине меньше единицы. Аналогичное соотношение, получающееся усреднением по всем возможным начальным условиям,

справедливо для описания зависимости величины средней длительности переходных процессов  $\langle T \rangle$  от точности  $\varepsilon$  ее определения:

$$\langle T_\varepsilon \rangle = \langle T_{\varepsilon_1} \rangle + \tau \times \log_{|\mu|} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \right). \quad (4)$$

Соотношение (4) применимо и для двумерных (а в общем случае и для многомерных) отображений, демонстрирующих периодическую динамику [27]. Поскольку для двумерных отображений периодические циклы будут характеризоваться двумя мультипликаторами  $\mu_{1,2}$ , являющимися собственными числами матрицы монодромии:

$$\mathbf{M} = \prod_{i=1}^{\tau} \begin{pmatrix} \frac{dx_{n+1}}{dx_n} & \frac{dy_{n+1}}{dx_n} \\ \frac{dx_{n+1}}{dy_n} & \frac{dy_{n+1}}{dy_n} \end{pmatrix} \Big|_{(x_i^0, y_i^0)} \quad (5)$$

вычисленной в элементах  $(x_i^0, y_i^0)$  периодического  $\tau$ -цикла. В соотношении (2) для двумерного отображения, находящегося в периодическом режиме, входит наибольший по модулю мультипликатор  $\mu = \max(|\mu_1|, |\mu_2|)$ .

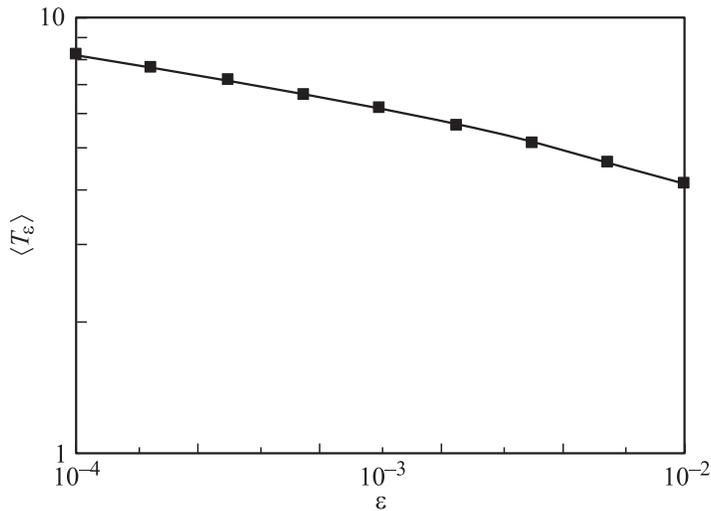
В том случае, когда отображение демонстрирует квазипериодическое поведение, соотношение (2) в том виде, в каком оно приведено, использовать нельзя, поскольку понятие мультипликатора неприменимо для непериодического режима. В подобных случаях в качестве величин, характеризующих устойчивость аттракторов, используется спектр ляпуновских показателей  $\lambda_i$  (подробнее см. [26]). Ляпуновские показатели применимы для описания как периодических, так и непериодических аттракторов, причем для периодических циклов периода  $\tau$  ляпуновский показатель связан с мультипликатором цикла соотношением [26]

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \ln |\mu|. \quad (6)$$

Соответственно соотношение (2) для периодического режима может быть переписано в виде

$$\langle T_\varepsilon \rangle = \langle T_{\varepsilon_1} \rangle + \frac{\ln(\varepsilon/\varepsilon_1)}{\lambda}, \quad (7)$$

где  $\lambda$  — самый большой (наименьший по модулю) отрицательный ляпуновский показатель, соответствующий наибольшему по абсолютной величине мультипликатору  $\tau$ -цикла.



**Рис. 2.** Зависимость средней длительности переходных процессов  $\langle T_\varepsilon \rangle$  от точности ее определения  $\varepsilon$  для отображения Заславского, находящегося в режиме квазипериодических колебаний. Значения управляющих параметров те же самые, что и для рис. 1. Черные квадраты соответствуют значениям средней длительности переходных процессов, определенным численно; сплошная линия описывается соотношением (7). Данные приведены в двойном логарифмическом масштабе.

Соотношение (7) теперь может быть применено при описании зависимости средней длительности переходного процесса от точности  $\varepsilon$  ее определения для отображений, демонстрирующих квазипериодические колебания, поскольку все предположения о поведении системы, использованные ранее [16,27] при его выводе, сохраняются: существует два направления в окрестности аттрактора, поведение системы вдоль каждого из этих направлений характеризуется соответствующим ляпуновским показателем, а завершение переходного процесса с наперед заданной точностью  $\varepsilon$  обуславливается наибольшим отрицательным ляпуновским показателем.

Все вышесказанное иллюстрирует рис. 2, на котором приведена зависимость средней длительности переходных процессов  $\langle T \rangle$  от точности ее определения  $\varepsilon$  в случае квазипериодических колебаний

при указанных значениях управляющих параметров. Поскольку бассейном притяжения аттрактора в отображении Эно является вся плоскость  $(x, y)$ , а изменение величины  $x$  определяется как  $\text{mod } 1$ , то при изучении средней длительности переходных процессов усреднение величины  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$  проводилось по начальным условиям, лежащим в области, ограничивающей квазипериодический аттрактор ( $x_0 \in [0; 1]$ ,  $y_0 \in [-0.5; 0.5]$ ). В качестве величины  $\langle T_{\varepsilon_1} \rangle$  была выбрана средняя длительность переходных процессов, определенная с точностью  $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ , численно равная  $\langle T_{10^{-2}} \rangle = 4.13$ . Спектр ляпуновских показателей  $\lambda_{1,2}$  определяется численно, с использованием перенормировки векторов возмущения и из ортогонализацией по методу Грама–Шмидта [26,28]. Модуль векторов возмущения составлял  $e = 10^{-4}$ , количество итераций  $N = 10^6$ . При указанных значениях управляющих параметров и параметров метода ляпуновские показатели оказались равными  $\lambda_1 = 0.0002$ ,  $\lambda_2 = -1.2031$ . Величина старшего ляпуновского показателя  $\lambda_1$  ответственна за квазипериодическую динамику системы, а второй ляпуновский показатель  $\lambda_2$  отвечает за сжатие фазового объема, обуславливает длительность переходных процессов и входит в качестве величины  $\lambda$  в соотношение (7). Из рис. 2 видно, что предложенное в работе соотношение (7) с хорошей степенью точности совпадает с результатами численного моделирования и адекватно описывает зависимость длительности переходного процесса от точности ее определения для случая квазипериодического поведения.

Таким образом, в работе описана методика, позволяющая определить длительность переходного процесса (с наперед заданной точностью  $\varepsilon$ ) для динамической системы, находящейся в режиме квазипериодических колебаний, а также для этого случая предложено аналитическое соотношение, описывающее зависимость средней длительности переходного процесса от точности ее определения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01–02–17392), а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC–006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

Автор выражает благодарность доценту Храмову А.Е. и студенту Стародубову А.В. за помощь и плодотворные дискуссии при выполнении настоящей работы.

## Список литературы

- [1] Безручко Б.П., Диканев Т.В., Смирнов Д.А. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2001. Т. 9 (3). С. 3–14.
- [2] Bezruchko B.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 036210.
- [3] Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50 (13). P. 935–938.
- [4] Zhu L., Raghu A., Lai Y.-C. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86 (18). P. 4017–4020.
- [5] Астахов В.В. и др. // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38 (2). С. 291–295.
- [6] Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. (15). С. 26–31.
- [7] Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. // Physica D. 1983. V. 7. P. 181.
- [8] Nusse H.E., Yorke J.A. // Physica D. 1989. V. 36. С. 137–156.
- [9] Janosi I.M. and Tél T. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49 (4). P. 2756–2763.
- [10] Dhamala M., Lai Y.-C., Kostelich E.J. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056207.
- [11] Dhamala M., Lai Y.-C., Kostelich E.J. // Phys. Rev. E. 2000. V. 61 (6). P. 6485–6489.
- [12] Короновский А.А., Ремпен И.С., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. // Изв. РАН. Сер. физ. 2002. Т. 66 (12). С. 1754–1760.
- [13] Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е. // Докл. АН РАН. 2002. Т. 383 (3). С. 322–325.
- [14] Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. XLV (10). С. 880–886.
- [15] Короновский А.А., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28 (15). С. 61–68.
- [16] Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова И.А. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 11 (1).
- [17] Hénon M. // Physica D. 1982. V. 5. P. 412–414.
- [18] Kaufmann Z., Lustfeld H. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 055206 (R).
- [19] Шустер Г. Детерминированный хаос. М., Мир, 1988.
- [20] Быстрой Г.П., Студениток С.И. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10 (6). С. 24–41.
- [21] Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10 (5). С. 25–31.
- [22] Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29 (8). С. 32–40.
- [23] Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
- [24] Заславский Г.М. Стохастическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.
- [25] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.

- [26] Кузнецов С.П. Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. М.: Физматлит, 2001.
- [27] Астафьев Г.Б., Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова А.Е. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2003. (в печати).
- [28] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9–30.