01;07

# Теоремы площадей для двухсекционных нелинейных направленных ответвителей

© П.И. Хаджи, О.В. Коровай

Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко, Тирасполь, Молдова
E-mail: tdsu4@tirastel.md

*В окончательной редакции 6 мая 2003 г.*

Впервые получены теоремы площадей, описывающие распространение ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения в световодах двухсекционного направленного ответвителя. Показано, что в такой системе существует ограниченная сверху совокупность площадей стационарно распространяющихся импульсов. Предсказаны также эффект квантования предельных циклов и возможность существования режима полной периодической перекачки энергии распространяющегося излучения из одного световода в другой.

В ряде работ [1–5] было показано, что нелинейные направленные ответвители (ННО) способны осуществлять полностью оптическое переключение сигналов. В [1] предложена модель нелинейного резонансного ответвителя, в котором диэлектрическая матрица содержит резонансные примеси. В численном эксперименте была обнаружена локализация светового импульса в одном канале ответвителя и перекачка энергии из одного канала в другой порциями, кратными энергии $2\pi$-импульса. В [2–3] изучено явление переключения солитонов и показано, что перекачка энергии существенно определяется формой начального импульса. В [3] в предположении локализации света в одном световоде получена форма солитоноподобного импульса. Еще с работы Мак-Кола и Хана [5] известно, что на вопрос об устойчивых солитонных импульсах отвечает „теорема площадей“, из которой следует, что односолитонное решение системы уравнений Максвелла–Блоха имеет площадь $2\pi$. Такой солитонный импульс может распространяться в объемной среде, состоящей из двухуровневых атомов. Теорема площадей для более сложных физических объектов, таких, например, как нелинейные направленные ответвители, до сих пор не получена. Имея такую теорему, можно было бы делать конкретные заключения о площадях стационарно распространяющихся импульсов в световодах ответвителя.

Цель данного сообщения — показать, что подобная теорема площадей для ННО представляется в виде системы двух нелинейных дифференциальных уравнений для площадей распространяющихся импульсов в каждом световоде ответвителя. Мы полагаем, что ННО состоит из двух идентичных туннельно-связанных световодов. Туннельная связь между полями в световодах возникает за счет проникновения поля из одного световода в другой. Среда, из которой приготовлены световоды, моделируется системой двухуровневых атомов, резонансно взаимодействующих с полем распространяющейся волны. Предполагаем, что в световодах ответвителя распространяются ультракороткие импульсы (УКИ) лазерного излучения с длительностью, меньшей времени релаксации возбуждений среды. Используя материальные уравнения Блоха и волновые уравнения для полей импульсов, в известном приближении медленно меняющихся в пространстве и времени огибающих [6,7], нетрудно получить следующую систему уравнений Максвелла–Блоха:

$$i\dot{\rho}_j = \sigma\left(q_j^+ E_j^- - q_j^- E_j^+\right), \tag{1}$$

$$i\dot{q}_j^+ = -\sigma\rho_j E_j^+/2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_j^+}{\partial t} + c\,\frac{\partial E_j^+}{\partial x} = 2i\pi\hbar\omega\left(\sigma q_j^+ + \mu E_{3-j}^+\right), \tag{3}$$

где $E_j^+(E_j^-)$ — положительно (отрицательно)-частотная компонента электрического поля электромагнитной волны (огибающая импульса), распространяющая в $j$-м световоде $(j = 1, 2)$ с частотой $\omega$ и волновым вектором $k$, $q_j^+$ — поляризация среды, $\rho_j$ — разность населенностей уровней, $\mu$ — константа туннельной связи между световодами ответвителя [5], $\sigma = d/\hbar$, $d$ — дипольный момент перехода между уровнями атомов. Предполагается, что светом возбуждается одна и та же собственная мода каждого световода. Введем далее следующий Anzatz: комплексное поле волны $E_j^+(x,t)$ представим в виде произведения амплитуды $E_j(x,t)$, зависящей от координаты и времени, и фазы $\varphi_j(x)$, зависящей только от координаты: $E_j^+(x,t) = E_j(x,t)\exp(i\varphi_j(x))$. Используя подход, развитый в [8], из (1)–(3) легко получить систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающую пространственную эволюцию площадей $\Theta_j(x)$, распространяющихся УКИ в каждом световоде:

$$\frac{d\Theta_1}{dx} = -\frac{\alpha}{2}\,\sin\Theta_1 - \kappa\Theta_2\sin\varphi, \tag{4}$$

$$\frac{d\Theta_2}{dx} = -\frac{\alpha}{2}\,\sin\Theta_2 + \kappa\Theta_1\sin\varphi, \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \kappa\,\frac{\Theta_1^2 - \Theta_2^2}{\Theta_1\Theta_2}\,\cos\varphi, \tag{6}$$

где площадь импульса $\Theta_j(x)$ определяется выражением

$$\Theta_j(x) = \sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_j(x,t)dt, \quad \text{а} \quad \varphi(x) = \varphi_2(x) - \varphi_1(x).$$

Здесь $\alpha$ — коэффициент линейного поглощения среды [6–8], $\kappa$ — константа связи [2–5]. Система уравнений должна решаться при задании граничных условий $\Theta_j(0)$ и $\varphi(0)$. Что касается задания $\varphi(0)$, то мы его выбираем из условия линейного приближения системы (4)–(6), когда площади импульсов $\Theta_j(0) \ll 1$. Легко показать, что в этом пределе фаза $\varphi(x) = \pi/2$. Принимая это значение фазы за начальное, получаем что $\varphi(x) = \pi/2$ всегда, т. е. пространственная эволюция фазы (фазовая модуляция распространяющегося импульса) отсутствует. Тогда из (4)–(6) получаем окончательную систему из двух уравнений для пространственного изменения площадей распространяющихся импульсов вида:

$$\frac{d\Theta_1}{dx} = -\frac{\alpha}{2}\,\sin\Theta_1 - \kappa\Theta_2, \tag{7}$$

$$\frac{d\Theta_2}{dx} = -\frac{\alpha}{2}\,\sin\Theta_2 + \kappa\Theta_1. \tag{8}$$

Если положить $\kappa = 0$, т. е. если световоды не взаимодействуют, то каждое из уравнений системы становится независимым и сводится к известной теореме площадей Мак-Кола и Хана [6,7]: $d\Theta/dx = -(\alpha/2)\sin\Theta$. Это соотношение гласит, что устойчиво распространяющимися импульсами являются импульсы с площадями $\Theta = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots, 2k\pi$, где $k$ — целое число. Импульсы с площадями $\Theta = 0, \pi, 3\pi, \ldots, (2k+1)\pi$ неустойчивы. Если положить $\alpha = 0$ (отсутствует поглощение в системе двухуровневых атомов), то уравнения (7)–(8) представляют собой

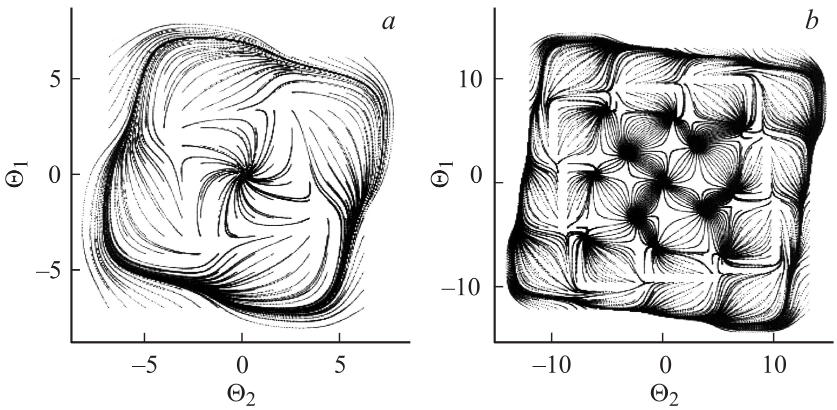


**Рис. 1.** Фазовые траектории системы уравнений (7)–(8) при значениях параметров: $a$ — $a = \alpha/2\kappa = 3$; $b$ — $a/2\kappa = 8$.

известную систему уравнений для линейного направленного ответвителя с решениями $\Theta_1(x) = \Theta_{10}\cos(\kappa x)$, $\Theta_2(x) = \Theta_{10}\sin(\kappa x)$, где $\Theta_{10}$ — площадь импульса в первом световоде при $x = 0$.

Найти аналитические решения системы (7)–(8) в общем случае не удается. Поэтому ниже представлены качественные решения системы, дополненные численными решениями. Полагая в (7)–(8) $d\Theta_j/dx = 0$ ($j = 1, 2$), приходим к системе трансцендентных уравнений, решения которой дают значения координат особых точек ($\Theta_{1s}$, $\Theta_{2s}$) на фазовой плоскости (значения площадей стационарно распространяющихся импульсов). Стационарные площади $\Theta_{1s}$, $\Theta_{2s}$ существенно определяются параметром $a = \alpha/2\kappa$. При любых значениях $a$ существует конечное, ограниченное сверху число стационарных площадей $\Theta_{js}$ ($j = 1, 2$). Отметим сразу, что при малых значениях параметра $a(a < \pi)$ имеется только одна особая точка с координатами $\Theta_{1s} = \Theta_{2s} = 0$, которая является усточивым фокусом (рис. 1, $a$). Из рис. 1, $a$ видно, что в некоторой области фазовой плоскости все фазовые траектории направлены к этой точке, а вне этой области фазовые траектории стремятся к предельному циклу, имеющему форму слегка наклоненного, искаженного квадрата. Следовательно, если значения площадей импульсов $\Theta_1(0)$, $\Theta_2(0)$ принадлежат области притяжения к особой точке, то площади таких импульсов по мере распространения будут убывать к нулю. Таким образом, при $a < \pi$ устойчиво распространяющимися импульсами являются $0\pi$ импульсы. Иначе ведут себя импульсы, начальные площади которых принадлежат области притяжения к предельному циклу. Их площадь по мере распространения периодически изменяется, и дальнейшее их распространение сводится к полной периодической перекачке энергии от одного световода к другому, что свойственно стационарному режиму функционирования направленных ответвителей [5]. Отметим, что за первым (ближайшим к центру, к устойчивому фокусу) предельным циклом у системы (7)–(8) возникает бесконечное множество концентрических предельных циклов, удаляющихся от центра.

При $a > \pi$ ситуация усложняется, так как число стационарных точек увеличивается. Так, при $a = 5$ число таких точек равно девяти, из которых только точка с координатами $\Theta_{1s} = \Theta_{2s} = 0$ является устойчивым фокусом, четыре точки являются неустойчивыми фокусами, а остальные четыре — седлами. Вне области этих особых точек формируется первый предельный цикл, и далее — серия последовательных концентрических предельных циклов. Следовательно, как и в случае $a = 3$, при $a = 5$ существует только одна стационарная особая точка, к которой стремятся траектории из определенной области значений площадей. Вне этой области имеет место режим периодической полной перекачки излучения из одного световода в другой.

При дальнейшем увеличении параметра $a$ структура фазовых траекторий еще более усложняется. Например, при $a = 8$ (рис. $1, b$) возникает двадцать пять особых точек, из которых девять являются устойчивыми фокусами, четыре — неустойчивыми фокусами и двенадцать — седлами. Каждый устойчивый фокус характеризуется своей областью притяжения. Импульсы с начальными площадями $\Theta_1(0)$ и $\Theta_2(0)$, принадлежащими определенной области притяжения, по мере распространения будут эволюционировать таким образом, что их площади на большом расстоянии будут соответствовать координатам данного фокуса. Из рис. $1, a, b$ также видно, что значения величин стационарных площадей $\Theta_{1s}$ и $\Theta_{2s}$ первого и второго световодов соответственно одной и той же особой точки могут быть примерно равными друг другу, а также могут сильно отличатьсся друг от друга. Последнее соответствует возможности существования режима распространения, сопровождающегося преимущественной локализацией энергии излучения в одном из световодов. Дальнейшее увеличение параметра $a$ приводит к генерации новых особых точек, заключенных внутри предельных циклов. Однако следует отметить, что число особых точек является конечным, а не бесконечным, как в теореме площадей Мак-Кола и Хана.

Система уравнений (7)–(8) показывает, что существует ограниченная сверху совокупность площадей стационарно распространяющихся импульсов. При этом площади стационарных импульсов в первом и втором световодах не являются произвольными, а связаны друг с другом трансцендентными соотношениями. Полученные теоремы площадей устанавливают также существование бесконечной последовательности концентрических предельных циклов, свидетельствующих о возможности существования режима полной периодической перекачки энергии излучения из одного световода в другой и обратно. Предельные циклы как периодические орбиты являются квантованными. Каждая последующщя кривая, являющаяся одним из предельных циклов, пересекает оси $\Theta_1$ и $\Theta_2$ в точках, отличающихся точно на $2\pi$ от точек пересечения предыдущей кривой. Изменение $\Theta_1$ и $\Theta_2$ вдоль каждого предельного цикла происходит непрерывно и периодически, а переход от одного предельного цикла к последующему происходит со скачкообразным изменением площади одного из импульсов на $2\pi$. Отметим, что при стационарном распространении излучения в ННО явление квантования предельных циклов отсутствует [5].

Если предположить, что один из световодов является линейным, а другой содержит резонансные двухуровневые примеси, то система уравнений (7)–(8) преобразуется к виду

$$\frac{d\Theta_1}{dx} = -\frac{\alpha_1}{2}\sin\Theta_1 - \kappa\Theta_2, \tag{9}$$

$$\frac{d\Theta_2}{dx} = -\frac{\alpha_2}{2}\Theta_2 + \kappa\Theta_1, \tag{10}$$

где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — линейные коэффициенты поглощения сред, из которых состоят световоды.

На рис. 2, *a* представлены фазовые траектории системы (9)–(10) при $\alpha_1/2\kappa = \alpha_2/2\kappa = \sqrt{3}$, которые сходятся в точке $\Theta_{1s} = \Theta_{2s} = 0$, откуда бы они не начинались. В некоторых областях фазового пространства возникают густые пучки фазовых траекторий. Такое поведение площадей стационарно распространяющихся импульсов также существенно отличается от поведения, предсказываемого теоремой Мак-Кола и Хана.

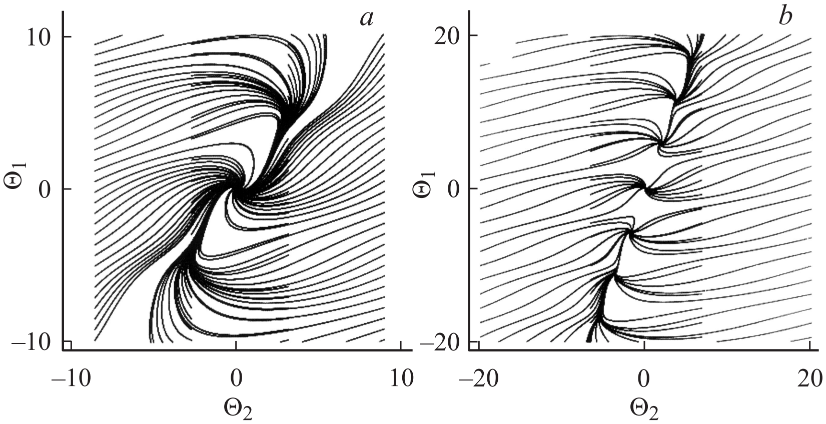


**Рис. 2.** Фазовые траектории системы уравнений $(9)-(10)$ при значениях параметров $a$ — $\alpha_1/2\kappa = \alpha_2/2\kappa = \sqrt{3}$; $b$ — $\alpha_1/2\kappa = \alpha_2/2\kappa = \sqrt{10}$.

На рис. $2, b$ представлено поведение фазовых траекторий при $\alpha_1/2\kappa = \alpha_2/2\kappa = \sqrt{10}$. В этом случае система $(9)-(10)$ имеет пять особых точек, причем три из них являются устойчивыми фокусами, а две другие — седлами. Видно, что фазовые траектории стремятся к устойчивым фокусам. При этом сколь бы ни были велики начальные площади импульсов $\Theta_{10}$ и $\Theta_{20}$, по мере распространения их площади стремятся к значениям площадей одного из устойчивых фокусов. Из рис. $2, b$ также видно, что существуют области притяжения к каждому из устойчивых фокусов, а в некоторых областях формируются густые жгуты фазовых траекторий. Система уравнений $(9)-(10)$ показывает, что существует ограниченная сверху совокупность площадей стационарно распространяющихся импульсов. Что касается предельных циклов, то они отсутствуют.

Таким образом, полученные теоремы площадей для нелинейных направленных ответвителей из одинаковых и различных световодов обнаруживают качественно различное поведение площадей импульсов при их распространении, которое существенно отличается от поведения площадей импульсов в объемной среде в режиме самоиндуцированной прозрачности.

## Список литературы

[1] *Guzman M., Romagnoli M., Wabnitz S.* // Appl. Phys. Lett. 1990. V. 56. P. 614.
[2] *Абдуллаев Ф.Х., Дарманян С.А., Гончаров В.И.* // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. В. 14. С. 29–32.
[3] *Абдуллаев Ф.Х., Гулямов Р.* // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. В. 20. С. 10–13.
[4] *Абдуллаев Ф.Х., Дарманян С.А., Хабибулаев П.К.* Оптические солитоны. Ташкент: ФАН, Узб. СССР, 1987. С. 200.
[5] *Майер А.А.* // УФН. 1996. Т. 166. В. 11. С. 1171–1196.
[6] *Mc Call S.L., Hahn E.L.* // Phys. Rev. 1969. V. 183. N 2. P. 457.
[7] *Аллен А., Эберли Дж.* // Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1979.
[8] *Алексеев В.А., Зельдович Б.Я.* // Квантовая электроника. 1975. Т. 2. В. 5. С. 1078–1080.