

01;09

## **Применение адаптивных вейвлетных базисов к анализу нелинейных систем с хаотической динамикой**

© В.А. Гусев, А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
Государственный учебно-научный центр „Колледж“ СГУ  
E-mail: aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 10 апреля 2003 г.

Рассматривается методика анализа нестационарных процессов, основанная на применении вейвлетных базисов, строящихся на основе отрезков анализируемых временных рядов. Приводятся примеры применения данной методики к временным рядам, порождаемым нелинейной системой в отсутствие и в присутствии шумов.

Хорошо известно, что нелинейные динамические системы различной природы, демонстрирующие сложные колебательные режимы, требуют для своего исследования специальных методов анализа [1–4]. Среди последних особое внимание привлекает вейвлетный анализ [5–7], являющийся мощным средством диагностики поведения нелинейных систем [5,8,9]. В настоящее время вейвлеты успешно применяются для анализа нестационарных сигналов, порождаемых системами биологической и медицинской природы [10,11], геофизическими процессами [5,12], электронно-плазменными системами [4,13,14], хаотическими и турбулентными процессами [7,15–17] и т.д. Одной из важных модификаций вейвлетного анализа является использование в качестве вейвлетного базиса специально конструируемых (адаптивных) вейвлетных базисов, которые позволяют выявлять те или иные особенности анализируемых сигналов [8,18].

В представленной работе предлагается методика анализа временных рядов, порождаемых нелинейными процессами, основанная на применении адаптивных вейвлетных базисов, которые конструируются на основе отрезков анализируемых временных рядов и служат для выделения из сигналов (в том числе и в присутствии шумов) тех или иных характерных особенностей и структур.

Непрерывное вейвлетное преобразование функции  $x(t)$  записывается как [5–7]:

$$W(t, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \psi^* \left( \frac{t-t'}{s} \right) dt', \quad (1)$$

где  $s$  — анализируемый временной масштаб,  $\psi$  — базисная вейвлетная функция („\*“ обозначает комплексное сопряжение), которая может быть выбрана достаточно произвольно, но должна удовлетворять ряду требований [5,6,8], наиболее важные из которых следующие. Во-первых, вейвлетная функция должна быть локализована как во временном, так и в частотном представлении, и, во-вторых,  $\psi$  должна удовлетворять условию нулевого среднего  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$  или, что эквивалентно,  $\hat{\psi}(0) = 0$ , где  $\hat{\psi}$  — фурье-образ вейвлетной функции.

Будем считать, что сигнал  $x(t)$  порождается нелинейной динамической системой, находящейся в колебательном режиме (в том числе и в режиме динамического хаоса). Рассмотрим процедуру построения комплексной вейвлетной функции  $\psi$  на основе временного ряда  $x(t)$ .

Выделим характерный временной масштаб  $\tau$  (или соответствующую ему частоту  $\omega_\tau = 2\pi/\tau$ ) нестационарного процесса  $x(t)$ . В случае периодических колебаний  $\tau$  совпадает с периодом колебаний. Если  $x(t)$  — хаотический нерегулярный сигнал, то величину  $\tau$  можно ввести различными способами. Например, если определить фазу  $\Phi$  хаотического сигнала с помощью преобразования Гилберта [2], то частота  $\omega_\tau$  будет определяться как  $\omega_\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t)/t$ . В простейшем случае частоту  $\omega_\tau$  можно оценить по наиболее интенсивному пику в фурье-спектре мощности  $P(\omega)$  сигнала  $x(t)$ . Далее выберем некоторый отсчет  $t_0$  во временной реализации  $x(t)$ , относительно которого будем строить вейвлетный базис. Реальная и мнимая часть вейвлетной функции  $\psi$  будет строиться в соответствии со следующими формулами:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \psi(t) &= \pi^{-1/4} \left\langle x(t-t_0) \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{(t-t_0)^p}{(n\tau)^p} \right) \right\rangle, \\ \operatorname{Im} \psi(t) &= \pi^{-1/4} \left\langle x(t-t_0 + \tau/2) \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{(t-t_0)^p}{(n\tau)^p} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\langle \cdot \rangle$  обозначает операцию удаления среднего значения для удовлетворения условия нулевого среднего,  $n$  и  $p$  — параметр вейвлета.

Из формулы (2) видно, что параметр  $t_0$  вейвлета характеризует отрезок ряда  $x(t)$ , который оказывает наибольшее влияние на вейвлетный спектр  $W(t, s)$ . Заметим, что вейвлетная функция вида (2) в случае  $x(t) = \sin \omega_\tau t$ ,  $n = 1.0$  и  $p = 2.0$  является аналогом широко используемого на практике вейвлета Морлета [5,8] и удовлетворяет всем требованиям, накладываемым на вейвлетную функцию. При определении вейвлетной функции в форме (2) величина  $f_s = 1/s$  вейвлетного преобразования имеет смысл, аналогичный частоте фурье-преобразования [7,8].

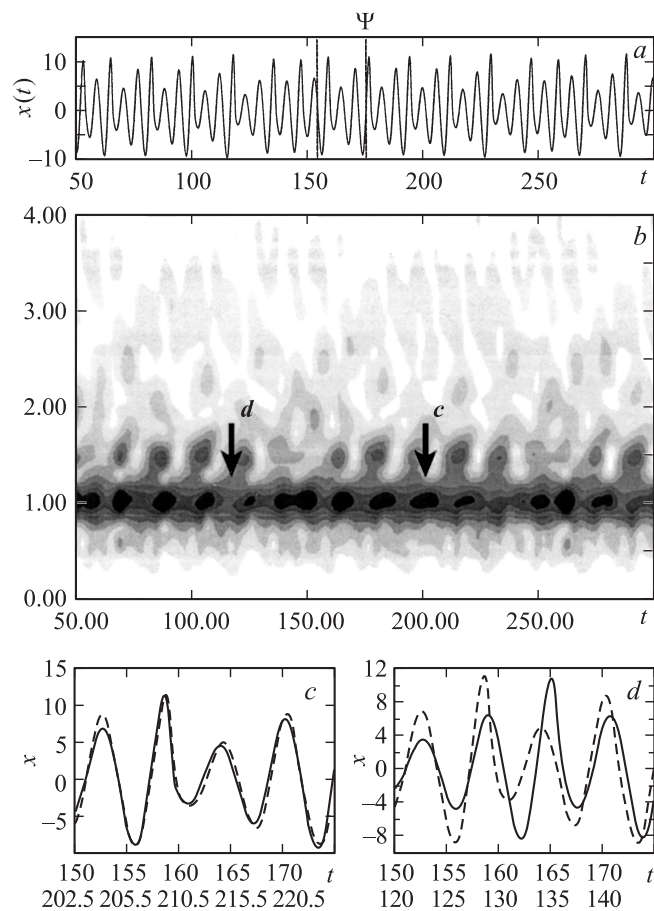
Вейвлетное преобразование с базисом (2) позволяет эффективно выделять из сигнала участки длиной  $\Delta t \approx 4n\tau$ , которые будут оказываться „похожими“ на отрезок временного ряда  $x(t)$ , где  $t \in (t_0 - 2n\tau, t_0 + 2n\tau)$ . Отметим, что на временном интервале  $|t - t_0| = 2n\tau$  амплитуда  $\psi(t)$  спадает в  $\exp(2^{(p-1)})$  раз. Последнее означает, что вейвлетная функция формируется на основе отрезка временного ряда с серединой в точке  $t = t_0$  и длиной  $4n\tau$ .

Для иллюстрации вышеописанной процедуры рассмотрим результаты вейвлетного анализа сигналов, порождаемых системой Рёсслера [1]:

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + ey, \quad \dot{z} = \omega - mz + xz, \quad (3)$$

которая является одной из эталонных нелинейных потоковых систем, демонстрирующих хаотическую динамику. Будем рассматривать систему (3) при значениях параметров  $e = w = 0.2$  и  $m = 5.8$ , что соответствует режиму ленточного хаоса.

На рис. 1, *a, b* представлены временная реализация  $x(t)$  (рис. 1, *a*) и результаты расчета вейвлетного спектра  $|W(t, f_s)|$  (рис. 1, *b*) с вейвлетной функцией, построенной на основе отрезка временного ряда  $x(t)$  с  $t_0 = 164.5$  ( $n = 1.0$ ,  $p = 8.0$ ) (участок временного ряда заключен на рис. 1, *a* между вертикальными штриховыми линиями). На рис. 1, *b* по оси абсцисс отложено время  $t$ , по оси ординат — частоты  $f_s$ , соответствующие масштабам  $s$  вейвлетного преобразования. Вид вейвлетного спектра показывает, что в нем постоянно присутствует временной масштаб  $s = \tau$ , однако его интенсивность меняется с изменением времени  $t$ . Максимумы вейвлетного спектра  $|W(t, s \approx \tau)|$ , которые приходятся на времена  $t = \hat{t}$ , соответствуют тем областям временного ряда, которые близки к отрезку, на основе которого формируется вейвлетная функция  $\psi$  (2). Последнее означает,



**Рис. 1.** *a* — отрезок временного ряда без шумовой компоненты  $x(t)$ , порождаемый системой Рёсслера в хаотическом режиме; *b* — соответствующий вейвлетный спектр  $|W(t, f_s)|$  сигнала  $x(t)$ ; *c, d* — сравнение отрезков временного ряда  $x(t)$ , соответствующих максимуму и минимуму на вейвлетном спектре (отмечены стрелками). На *a* отмечен символом  $\psi$  отрезок ряда, использующийся для конструирования вейвлетного базиса (он же показан на *c, d* штриховой линией). Первый ряд подписей по оси абсцисс на *c, d* соответствует вейвлетному базису (штриховая линия), второй ряд — сравниваемому отрезку временного ряда.

что величина  $\int_{t-2\pi\tau}^{t+2\pi\tau} [x(t+t') - x(t_0+t')]^2 dt'$  минимизируется в точках  $t \sim \hat{t}$ .

Последнее иллюстрирует рис. 1, *c, d*, на котором представлены отрезки временных рядов, соответствующие моменту времени  $\hat{t} = 210$  (отмечен на рис. 1, *b* стрелкой „*c*“), когда на вейвлетной поверхности имеет место максимум (рис. 1, *c*), и для сравнения моменту времени  $t = 133$ , при котором наблюдается минимум на вейвлетном спектре  $|W(t, s \approx \tau)|$  (отмечен на рис. 1, *b* стрелкой „*d*“ (рис. 1, *d*)), а также исходный отрезок временного ряда, который использовался для формирования вейвлетной функции  $\psi$  (штриховая линия на рис. 1, *c, d*).

Сравнение зависимостей показывает, что в первом случае соответствующие отрезки хаотического ряда практически совпадают, а во втором случае — наблюдается значительное отличие вида отрезков ряда.

Реальные сигналы обычно оказываются искаженными наличием шумов. При этом важной проблемой является эффективное выделение и анализ полезного сигнала  $x(t)$  из исходного временного ряда. Поэтому рассмотрим временной ряд  $y(t)$ , который содержит наряду с детерминированным сигналом  $x(t)$  шумовую компоненту

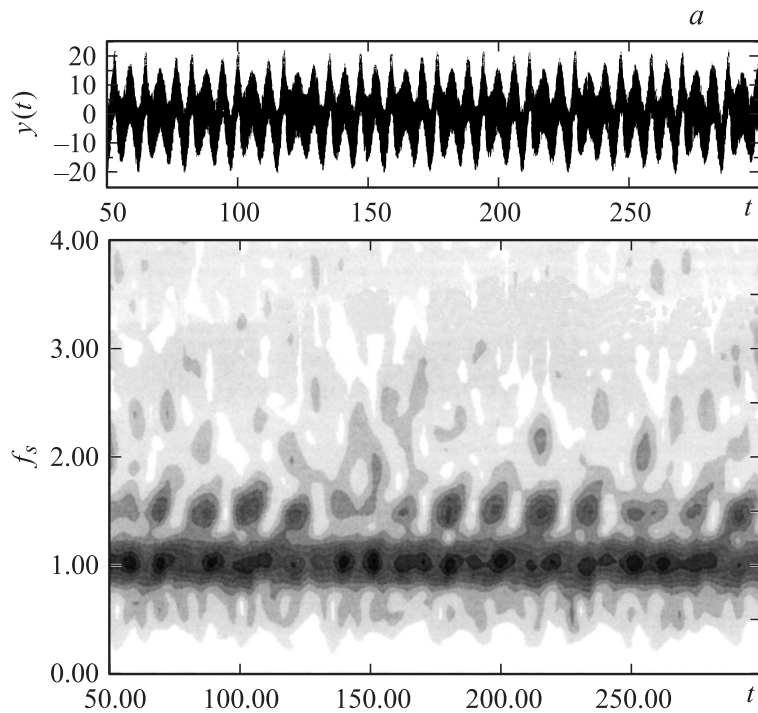
$$y(t) = x(t) + D\xi(t), \quad (4)$$

где  $\xi(t)$  — случайная величина, моделирующая гауссов белый шум.

Будем, как и выше, предполагать, что детерминированный сигнал  $x(t)$  порождается системой Рёсслера (3) с теми же управляющими параметрами. Рассмотрим вейвлетные спектры сигнала  $y(t)$  (4), полученные при различных амплитудах шума  $D$  (различных отношениях сигнал/шум  $\chi = |x_{\max}|/D$ , где  $|x_{\max}|$  — максимальное значение переменной  $x(t)$ ).

Анализ вейвлетных спектров, построенных по временным рядам (4) при различных амплитудах шума, показал, что эффективное выделение особенностей исходного временного сигнала  $x(t)$  с помощью вейвлетного преобразования возможен при отношениях сигнал/шум  $\chi > 0.2 \div 0.3$ .

Для иллюстрации этого на рис. 2 представлены временные реализации  $y(t)$  сигнала (4) и соответствующие вейвлетные спектры  $|W(t, f_s)|$ , построенные для двух различных значений отношения сигнал/шум:



**Рис. 2.** Временные ряды и соответствующие вейвлетные спектры сигналов с шумовой компонентой, построенные для различных интенсивностей шума:  $a$  —  $\chi = 1.0$ ,  $b$  —  $\chi = 0.5$ . При конструировании вейвлетного базиса использовался тот же отрезок временного ряда, что и для данных на рис. 1.

$\chi = 1.0$  (рис. 2,  $a$ ) и  $\chi = 0.5$  (рис. 2,  $b$ ). Для удобства сравнения результатов анализа сигнала  $x(t)$  без шума спектры и временные реализации на рис. 2 построены в тех же временных пределах, что и рис. 1. В качестве базисной вейвлетной функции (2) выбирался отрезок зашумленного временного ряда с  $t_0 = 164.5$  и  $n = 1.0$ ,  $p = 8.0$  (рис. 1,  $a$ ).

Из рис. 2, а также его сравнения с рис. 1, построенным по временному ряду без шумовой добавки, следует, что вейвлетное преобра-

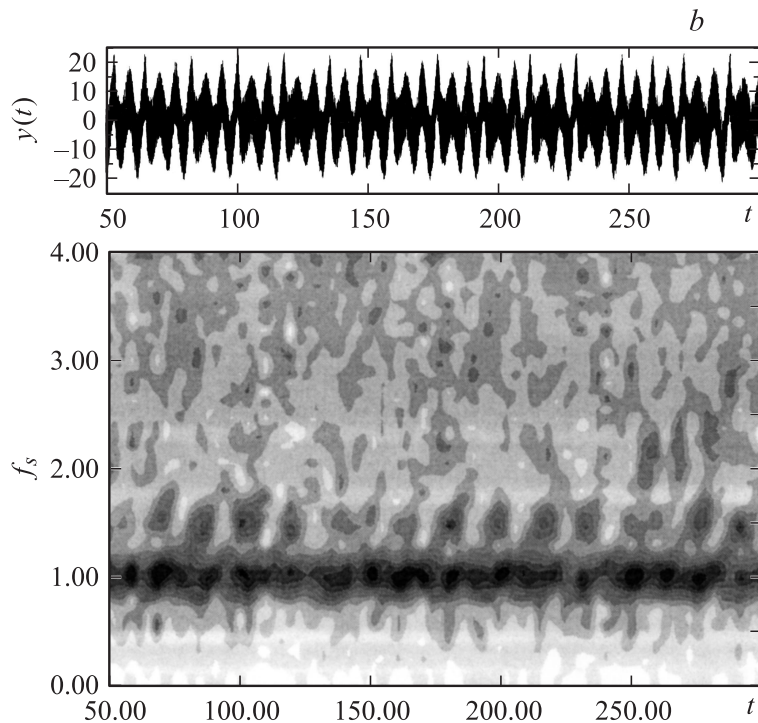


Рис. 2 (продолжение).

зование с базисной функцией, представляющей собой непосредственно отрезок анализируемого временного ряда (2), позволяет, как и в случае временного ряда без шумовой компоненты, анализировать характерные особенности исследуемого сигнала. При сравнительно небольшой интенсивности шума вид вейвлетной поверхности (рис. 2, *a*;  $\chi = 1.0$ ) слабо отличается от соответствующего вейвлетного спектра сигнала без шумовой компоненты (рис. 1, *b*). При большей интенсивности шума (рис. 2, *b*;  $\chi = 0.5$ ) вид вейвлетного спектра искажается, максимумы в нем становятся менее ярко выраженными. Особенно сильно вид вейвлетного спектра искажается по сравнению с изображенным на рис. 1, *b* в области масштабов  $f_s > 2.0$ . Однако в области  $s \sim 1.0$

структура вейвлетной поверхности  $|W(t, f_s)|$  близка к структуре соответствующей поверхности сигнала без шума, что делает возможным ее эффективный анализ. С дальнейшим ростом интенсивности шума структура вейвлетной поверхности разрушается в диапазоне масштабов временного процесса  $s \sim 1.0$ , что уже не позволяет анализировать свойства исходного сигнала  $x(t)$  в присутствии шума.

Таким образом, в работе показана возможность эффективного анализа временных рядов (в том числе и в присутствии шумов) с помощью вейвлетного анализа, использующего в качестве базисных функций отрезки этих же временных рядов.

Работа поддержана РФФИ (проекты 02-02-16351 и 01-02-17392).

## Список литературы

- [1] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М: Физматлит, 2001.
- [2] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
- [3] Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2001.
- [4] Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. Т. 1. М.: Физматлит, 2003.
- [5] Астафьева Н.М. // УФН. 1996. Т. 166. С. 1145.
- [6] Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. SIAM, 1991 (Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001).
- [7] Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 196 с.
- [8] Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ в приложениях к задачам нелинейной динамики. Саратов: Изд-во ГосУНЦ „Колледж“, 2002. 216 с.
- [9] Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е. // Изв. РАН. Сер. физич. 2000. Т. 64. № 12. С. 2383.
- [10] *Wavelets in Medicine and Biology* / Eds A. Aldroubi, M. Unser. Boca Raton: CRC Press. FL, 1994.
- [11] Unser M., Aldroubi A. // Proc. IEEE. 1996. V. 84. № 4. P. 626.
- [12] Torrence C., Compo G.P. // Bulletin of the American Meteorological Society. 1998. V. 79. P. 61.
- [13] Van Milligen B.Ph., Sánchez E., Estrada T. et al. // Phys. Plasmas. 1995. V. 2. N 8. P. 3017.



- [14] Короновский А.А., Храмов А.Е. // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 8. С. 722.
- [15] Argoul F. et al. // Nature. 1989. V. 338. P. 51.
- [16] Farge M. // Annu. Rev. Fluid. Mech. 1992. V. 24. P. 395.
- [17] Короновский А.А., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 1. С. 3.
- [18] Frick P., Baliunas S.L., Galyagin D., Sokoloff D.W. // The Astrophysical Journal. 1997. V. 483. P. 426.