01;07

Энергия потока фотонов в диэлектрическом волноводе

© И.В. Дзедолик

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
Симферополь, Украина
E-mail: dzedolik@crimea.edu

Поступило в Редакцию 10 февраля 2003 г.
В окончательной редакции 14 марта 2003 г.

Рассмотрено распространение монохроматического электромагнитного поля в диэлектрическом волноводе кругового сечения с квантово-полевой точки зрения. Найден гамильтониан системы „поток фотонов — диэлектрический волновод“ и получено выражение для энергии системы в линейном и нелинейном случаях. Показано, что энергия системы зависит от соотношения числа фотонов с правой и левой спиральностью.

Теоретический анализ распространения электромагнитного поля в диэлектрических волноводах весьма продуктивно производится методами классической электродинамики [1]. Однако электромагнитное поле в среде представляет собой поток фотонов, т. е. является квантовым объектом [2, с. 109], поэтому ряд особенностей динамики поля в волноводе удобнее рассматривать с точки зрения квантовой теории.

Рассмотрим распространение монохроматического поля в диэлектрическом волноводе кругового сечения в линейном случае. Используя в стационарной среде при отсутствии свободных зарядов и токов гамильтонову калибровку для потенциалов $\Phi = 0$ [3, с. 16; 4, с. 76], запишем уравнения поля в диэлектрическом волноводе

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \mathbf{A}), \tag{1}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(r)$ — диэлектрическая проницаемость волновода, зависящая от радиальной координаты. Решение уравнения (1) с учетом осевой симметрии задачи выбираем в форме $\mathbf{A} = \mathbf{F}(r)\exp[i(\omega t - \beta z + \kappa l \varphi)]$, где $\kappa = \pm 1$, $l = 0, 1, 2, \dots$ Граничными условиями является непрерывность тангенциальных компонент электрического $E_{\varphi,z} = -\partial A_{\varphi,z}/c\partial t$ и магнитного $B_{\varphi,z} = (\nabla \times \mathbf{A})_{\varphi,z}$ полей на боковой поверхности волновода с радиусом r_0. Функции $\mathbf{F}$ представляют собой соответствующие полиномы в зависимости от профиля ε, а постоянные распространения β_l волноводных мод удовлетворяют характеристическому уравнению, полученному из граничных условий при r_0 [1].

Разложим поле внутри волновода по модам с правой и левой циркулярной поляризацией ($\kappa = \pm 1$)

$$\mathbf{A} = \sum_l \sum_\kappa \mathbf{F}_l(r) \times \Big\{ a_{l\kappa}(t) \exp\big[i(\beta_l z - \kappa l \varphi)\big] + a^*_{l\kappa}(t) \exp\big[-i(\beta_l z - \kappa l \varphi)\big] \Big\}, \qquad (2)$$

где амплитуды $a_{l\kappa}(t) \sim \exp(-i\omega t)$. Для перехода к квантовой теории произведем преобразование переменных , позволяющих записать уравнения поля в форме уравнений Гамильтона. Введем канонические координаты и импульсы [5, с. 20].

$$Q_{l\kappa} = \frac{1}{2}(a_{l\kappa} + a^*_{l\kappa}), \qquad P_{l\kappa} = \frac{\omega}{2i}(a_{l\kappa} - a^*_{l\kappa}), \qquad (3)$$

удовлетворяющие уравнениям $\dot{Q}_{l\kappa} = P_{l\kappa}$, $\dot{P}_{l\kappa} = -\omega^2 Q_{l\kappa}$, где точка обозначает производную по времени. В новых переменных (3) векторный потенциал (2) имеет вид

$$\mathbf{A} = 2 \sum_l \sum_\kappa \mathbf{F}_l \big(Q_{l\kappa} \cos\phi_{l\kappa} - \omega^{-1} P_{l\kappa} \sin\phi_{l\kappa}\big), \qquad (4)$$

где $\phi_{l\kappa} = \beta_l z - \kappa l \varphi$.

Найдем гамильтониан системы, используя классическое выражение для энергии монохроматического электромагнитного поля в диэлектрической немагнитной среде

$$\widetilde{E}_L = \frac{1}{8\pi} \int_V dV (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2). \qquad (5)$$

Подставляя выражения для электрического $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A}/c\partial t$ и магнитного $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ полей в (5) произведем интегрирование по конечному объему, представляющему цилиндр с радиусом r_0 и длиной Λ (пропорциональной длине между ближайшими минимумами поля). Заменим канонические переменные операторами с правилами коммутации

$[\hat{P}_{l\kappa j}, \hat{Q}_{l\kappa j'}] = -i\hbar\delta_{jj'}$, трансформируя выражение для энергии в гамильтониан $\widetilde{E}_L \to \hat{H}_L$. Для дальнейшего анализа задачи введем операторы уничтожения и рождения

$$a_{l\kappa j} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{Q}_{l\kappa j} + i\hat{P}_{l\kappa j}\right), \quad a^{+}_{l\kappa j} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\left(\omega\hat{Q}_{l\kappa j} - i\hat{P}_{l\kappa j}\right) \qquad (6)$$

с правилами коммутации $[a_{l\kappa j}, a^{+}_{l\kappa j'}] = \delta_{jj'}$. Тогда получаем гамильтониан в форме

$$\hat{H}_L = \hbar\omega \sum_{l} \sum_{\kappa=\pm 1} \Big[\frac{1}{2} \sum_{j=1,2,3} q_{lj}(a_{l\kappa j}a^{+}_{l\kappa j} + a^{+}_{l\kappa j}a_{l\kappa j})$$

$$+ \kappa l q_{l4}(a_{l\kappa z}a^{+}_{l\kappa\varphi} + a^{+}_{l\kappa z}a_{l\kappa\varphi})\Big], \qquad (7)$$

где

$$q_{l1} = \Lambda \int_0^1 dRR\left(\frac{\varepsilon r_0^2}{c^2} + \frac{\beta_l^2 r_0^2 + l^2/R^2}{\omega^2}\right)\mathbf{F}_l^2,$$

$$q_{l2} = \Lambda \int_0^1 dRR\left[\left(\frac{\varepsilon r_0^2}{c^2} + \frac{\beta_l^2 r_0^2 + 1/R^2}{\omega^2}\right)\mathbf{F}_l^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(U_l^2 \mathbf{F}'^2_l + \frac{2U_l}{R}\mathbf{F}_l\mathbf{F}'_l\right)\right],$$

$$q_{l3} = \Lambda \int_0^1 dRR\left[\left(\frac{\varepsilon r_0^2}{c^2} + \frac{l^2}{\omega^2 R^2}\right)\mathbf{F}_l^2 + \frac{U_l^2}{\omega^2}\mathbf{F}'^2_l\right], \quad q_{l4} = \frac{\Lambda\beta_l r_0}{\omega^2}\int_0^1 dR\mathbf{F}_l^2,$$

$U_l = r_o(\omega^2\varepsilon/c^2 - \beta_l^2)^{1/2}$, $R = r/r_0$, штрих означает производную по аргументу функции.

Энергию системы варазим с помощью чисел фотонов $N_{l\kappa j}$ $(j \to r, \varphi, z)$ в соответствующей компоненте моды:

$$\widetilde{E}_L = \hbar\omega \sum_{l} \sum_{\kappa=\pm 1} \Big[\sum_{j=1,2,3} q_{lj}\left(N_{l\kappa j} + \frac{1}{2}\right)$$

$$+ \kappa l q_{l4}\left(\sqrt{N_{l\kappa z}(N_{l\kappa\varphi} + 1)} + \sqrt{N_{l\kappa\phi}(N_{l\kappa z} + 1)}\right)\Big]. \qquad (8)$$

В случае, когда в компоненте линейно поляризованной моды число фотонов с правой спиральностью ($\kappa = 1$) равно числу фотонов с левой спиральностью ($\kappa = -1$), члены с коэффициентом q_{l4} в (8) при суммировании по κ исчезают. В противном случае, когда поле представляет собой суперпозицию циркулярно поляризованных мод при $l \neq 0$, члены с q_{l4} не сокращаются и энергия системы (8) зависит от соотношения числа фотонов $N_{l\kappa\varphi}$, $N_{l\kappa z}$ с левой и правой спиральностью в соответствующей компоненте моды. Последнее можно трактовать как зависимость энергии системы от „спин-орбитального взаимодействия" [6] электромагнитного поля в волноводе, если орбитальный момент поля (характеризуемый индексом l моды) при суперпозиции мод в волноводе отличен от нуля, а спин характеризуется поляризацией моды. Классическая интерпретация данного явления может быть дана, если моде с индексом $l > 0$ поставить в соответствие луч (нормальный к волновому фронту в данной точке), который распространяется по право- либо левовращающейся спирали при отражении от стенок волновода. Если при этом направление вращения циркулярной поляризации моды совпадает с направлением кручения спиральной траектории луча, то энергия поля увеличивается, и наоборот, т. е. асимметрия в цилиндрической системе возникает в результате нарушения симметрии при внеосевом возбуждении волновода. Другой вариант классической интерпретации рассматриваемого явления может быть дан на основе теории генерации устойчивых циркулярных CV и неустойчивых IV оптических вихрей, переносящих различный угловой момент в результате спин-орбитального взаимодействия образующих их волноводных мод [7].

Отношение энергии системы при линейной $\tilde{E}_{LL}$ и циркулярной $\tilde{E}_{LC}$ поляризации мод

$$\frac{\widetilde{E}_{LL}}{\widetilde{E}_{LC}} = \sum_{j=1,2,3} q_{lj}\left(N_{lj}^{\pm} + \frac{1}{2}\right)\left\{\sum_{j=1,2,3} q_{lj}\left(N_{lj} + \frac{1}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \kappa l q_{l4}\left(\sqrt{N_{lz}(N_{l\varphi} + 1)} + \sqrt{N_{l\varphi}(N_{lz} + 1)}\right)\right\}^{-1}$$

зависит от числа фотонов в компонентах моды (здесь число фотонов в моде с линейной поляризацией равно числу фотонов в моде с циркулярной поляризацией $N_{lj}^{(+)} + N_{lj}^{(-)} = N_{lj\kappa}$). В частном случае

$l=1$ полагаем $N_{1x}=N_{1\varphi}+N_{1z}\equiv N$, $q_{1x}=q_{14}$, тогда получаем $\widetilde{E}_{LL}/\widetilde{E}_{LC}=(N+1/2)\{N+1+\kappa[\sqrt{a_z N(a_\varphi N+1)}+\sqrt{a_\varphi N(a_z N+1)}]\}^{-1}$, где $a_\varphi+a_z=1$. $\widetilde{E}_{LL}/\widetilde{E}_{LC}$ меньше либо больше единицы в зависимости от направления вращения циркулярно поляризованной моды ($\kappa=\pm 1$). При мощности излучения лазера $P=5\,\mathrm{mW}$ с длиной волны $\lambda=0.63\,\mu\mathrm{m}$, $N\approx P\cdot 1c/\hbar\omega=2.5\cdot 10^{15}$ полагаем $a_\varphi+10^{-7}=1$, т.е. $\widetilde{E}_{LL}/\widetilde{E}_{LC}=0.99937$ при $\kappa=1$ и $\widetilde{E}_{LL}/\widetilde{E}_{LC}=1.00063$ при $\kappa=-1$.

Для проверки на практике рассматриваемого явления возможен относительно простой эксперимент. Если направить линейно поляризованное излучение лазера на кварцевую кристаллическую пластинку толщиной d, плоскости которой параллельны оптической оси, то необыкновенная волна (ее показатель преломления n_e, электрический вектор $\mathbf{E}_e$ направлен вдоль оптической оси) и обыкновенная волна (показатель преломления n_0, вектор $\mathbf{E}_0$ направлен поперек оси) приобретают в пластинке разность хода $\Delta d=(n_0-n_e)d$. Набег фаз между обыкновенной и необыкновенной волной равен $\Delta\phi=2\pi\Delta d/\lambda$, т.е. на выходе из пластинки конец электрического вектора волны $\mathbf{E}$ будет двигаться по траектории, описываемой уравнением [8] $x^2/a^2+y^2/b^2-2xy\cos(\Delta\phi)/ab=\sin^2(\Delta\phi)$. При нормальном падении линейно поляризованной волны с направлением вектора $\mathbf{E}$ под углом $\delta=\pi/4$ к оптической оси пластинки, амплитуды колебаний электрического вектора вдоль оси и поперек оси будут равны $(a=E\cos\delta=E\sin\delta=b)$ и при толщине пластинки $d=(m+1/4)\lambda/(n_0-n_e)$ (где $m=0,1,2,\ldots$, $n_0=1.54282$, $n_e=1.55188$) на выходе из пластинки волна приобретает циркулярную поляризацию. Причем вращение вектора $\mathbf{E}$ прошедшей пластинку волны по часовой стрелке либо против нее будет определяться ориентацией вектора $\mathbf{E}$ падающей волны и оптической оси пластинки. Поворачивая пластинку в ее плоскости, получают левую либо правую циркулярную поляризацию прошедшего излучения. С помощью микрообъектива возбуждают оптическое волокно излучением с правой либо с левой циркулярной поляризацией, а при удалении пластинки — с линейной поляризацией. Излучение, прошедшее волокно, направляют на фотодиод, подсоединенный к цифровому вольтметру. Разница показаний вольтметра для левой либо правой циркулярной поляризации и линейной поляризации излучения позволит зафиксировать рассматриваемый энергетический эффект в волокне.

Учтем нелинейный отклик среды диэлектрического волновода, например плавленого кварца, из которого изготавливают оптические волокна. В этом случае в уравнение поля и в выражение для энергии необходимо добавить нелинейные члены

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \mathbf{A}) + \frac{\alpha_3}{c^4}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^3, \tag{9}$$

$$\widetilde{E}_{NL} = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V dV \left(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{\alpha_3}{2}\mathbf{E}^4 + \mathbf{B}^2\right), \tag{10}$$

где $\alpha_3 = 4\pi\chi_3$ — коэффициент, характеризующий кубичную по полю диэлектрическую восприимчивость среды [9]. Полагая нелинейный отклик среды слабым, т.е. сохраняющим в целом структуру мод, представим гамильтониан в виде $\hat{H} = \hat{H}_L + \hat{H}_{NL}$, где

$$\hat{H}_{NL} = 8(\hbar\omega)^2 \sum_l \sum_{\kappa=\pm 1} \tilde{q}_l$$
$$\times \left[\begin{array}{l} \sum\limits_j \sum\limits_{j'} (a_{l\kappa j} a_{l\kappa j} a^+_{l\kappa j'} a^+_{l\kappa j'} + a^+_{l\kappa j} a^+_{l\kappa j} a_{l\kappa j'} a_{l\kappa j'} + a_{l\kappa j} a^+_{l\kappa j} a_{l\kappa j'} a^+_{l\kappa j'} + \\ \quad + a^+_{l\kappa j} a_{l\kappa j'} a^+_{l\kappa j} a_{l\kappa j'} + a_{l\kappa j} a^+_{l\kappa j} a^+_{l\kappa j'} a_{l\kappa j'} + a^+_{l\kappa j} a_{l\kappa j} a_{l\kappa j'} a^+_{l\kappa j'}) \end{array}\right], \tag{11}$$

$$\tilde{q}_l = \frac{\alpha_3 \Lambda r_0^2}{c^4}\int\limits_0^1 dRR\mathbf{F}_l^4.$$

Энергия системы в нелинейном случае описывается выражением $\widetilde{E} = \widetilde{E}_L + \widetilde{E}_{NL}$, где линейное слагаемое $\widetilde{E}_L$ описывается выражением (8), а нелинейное слагаемое $\widetilde{E}_{NL}$ находим из выражения (11) в виде

$$\widetilde{E}_{NL} = 48(\hbar\omega)^2 \sum_l \sum_{\kappa=\pm 1} \tilde{q}_l \left\{\sum_{j,j'}\left[N_{l\kappa j}\left(N_{l\kappa j'} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}N_{l\kappa j'}\right] + 2\right\}. \tag{12}$$

Из выражения (12) видно, что нелинейный вклад в энергию системы в данном приближении не зависит от спиральности фотонов κ (в отличие от линейного (8)).

Таким образом, энергия электромагнитного поля, распространяющегося в диэлектрическом волноводе кругового сечения, зависит от соотношения числа фотонов с левой и правой спиральностью в компоненте моды, т. е. поляризации поля, и для суперпозиции циркулярно поляризованных мод в волноводе в общем случае может быть как больше, чем энергия при линейной поляризации мод, так и меньше, что связано с передачей углового момента циркулярно поляризованного поля волноводу. На основе данного эффекта возможно проектирование волоконно-оптических датчиков физических величин с удаленным считыванием информации.

Автор благодарит К.Н. Алексеева и П.Н. Лейфера за плодотворные дискуссии.

Список литературы

[1] *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 565 с.
[2] *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. М.: Наука, 1981. 503 с.
[3] *Славнов А.А., Фаддеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988. 272 с.
[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. Теоретическая физика. Т. 2. М.: Наука, 1988. 512 с.
[5] *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Квантовая электродинамика. Теоретическая физика. Т. 4. М.: Наука, 1989. 728 с.
[6] *Liberman V.S., Zel'dovich B.Ya.* // Phys. Rev. A. 1992. V. 45 (8). P. 5199.
[7] *Alexeyev C.N., Soskin M.S., Volyar A.V.* Semiconductor physics, Quantum electronics & Optoelectronics. 2000. V. 3 (4). P. 501.
[8] *Ландсберг Г.С.* Оптика. М.: Наука, 1976. 928 с.
[9] *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 312 с.