

09

Частичная синхронизация в неоднородной автоколебательной среде

© А.А. Акопов, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов, Д.Д. Матюшкин

Саратовский государственный университет
E-mail: artem@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 11 марта 2003 г.

Исследуется частичная синхронизация в непрерывной среде с расстройкой собственной частоты вдоль пространственной координаты. Для непрерывной среды обнаружен и исследован эффект образования частотных кластеров, известный ранее для дискретных моделей распределенных систем. Исследована эволюция кластерных структур при вариации параметров.

Известно, что в цепочках и решетках автогенераторов зависимость собственной частоты от пространственной координаты при наличии достаточно сильной связи приводит к образованию кластеров частотной синхронизации, которые существуют в широкой области вариации параметров и являются устойчивыми к действию шума [1–4]. Однако эффекты частичной (кластерной) синхронизации в неоднородной непрерывной среде не рассматривались.

Целью настоящей работы является исследование кластеров частотной синхронизации в модели автоколебательной среды с непрерывной пространственной координатой.

Исследуемая в работе модель среды описывается одномерным нелинейным уравнением в частных производных вида:

$$a_t = i\omega(x)a + r(1 - |a|^2)a + ga_{xx}, \quad (1)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $a(x, t)$ — комплексная амплитуда колебаний, зависящая от времени t и от пространственной координаты x ; a_t — первая производная по времени; a_{xx} — вторая производная по пространственной координате. Параметр нелинейности r и коэффициент диффузии g считаются независимыми от x и полагаются действительными. Функция $\omega(x)$ характеризует расстройку собственной частоты вдоль пространственной координаты. В работе рассматривается линейная

частотная расстройка по пространственной координате: $\omega(x) = \frac{x\Delta_{\max}}{l}$, где l — длина системы.

Уравнение (1) представляет собой частный случай уравнения Гинзбурга–Ландау, являющегося одним из основных уравнений теории нелинейных неравновесных сред. Цепочка квазигармонических автогенераторов с различными собственными частотами, исследовавшаяся в [1,4], является точным дискретным аналогом среды (1). Уравнения цепочки приводят к (1) при предельном переходе к непрерывной пространственной координате.

В проведенных исследованиях рассматривалась распределенная система конечной длины l с граничными условиями второго рода:

$$a_x(x, t)|_{x=0;l} \equiv 0. \quad (2)$$

Начальное состояние среды выбиралось случайным образом вблизи некоторого однородного состояния. Уравнение (1) численно интегрировалось по неявной схеме с использованием метода прямой и обратной прогонки. По результатам численного интегрирования рассчитывалась зависимость средней частоты колебаний от пространственной координаты x :

$$\Omega(x) = \langle \phi_t(x, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\phi(x, t_0 + T) - \phi(x, t_0)}{T}. \quad (3)$$

Функция $\phi(x, t)$ представляет собой фазу колебаний. Она определяется как

$$\phi(x, t) = \arg a(x, t) = \arctg \left(\frac{\operatorname{Im} a(x, t)}{\operatorname{Re} a(x, t)} \right) \pm \pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Добавление величины $\pm \pi k$ производится исходя из непрерывности изменения фазы во времени. В качестве управляющих параметров в работе были выбраны длина системы l и коэффициент диффузии g . Параметр надкритичности фиксировался: $r = 0.5$. Расстройка собственной частоты между граничными точками среды оставалась постоянной: $\Delta_{\max} = 0.2$.

Проведенные численные эксперименты показали, что распределенная неоднородная система (1) в широкой области изменения параметров демонстрирует тот же самый эффект формирования кластеров частотной синхронизации, который известен для цепочки автогенераторов [1].

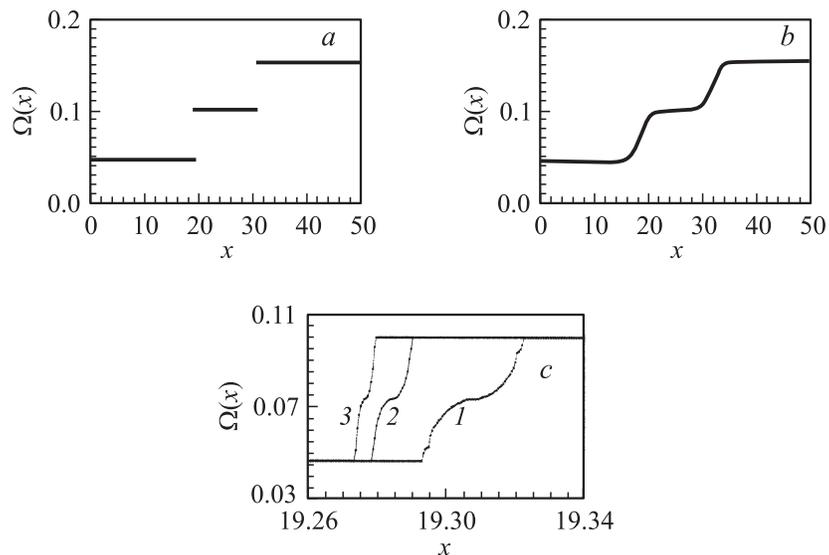


Рис. 1. Изменение средней частоты колебаний Ω вдоль среды с $\Delta_{\max} = 0.2$, $l = 50$: *a* — идеальные кластеры при $g = 1.0$; *b* — неидеальные кластеры при $g = 0.85$ (в случаях *a* и *b* шаги дискретизации по времени и координате выбирались соответственно $\Delta t = 0.01$ и $\Delta x = 0.05$); *c* — фрагмент идеальной кластерной структуры (*a*), полученной при $\Delta x = 0.0005$ и различных значениях шага по времени $\Delta t = 0.05, 0.02, 0.01$ (соответственно кривые *1, 2, 3*). Во всех случаях вычисление проводилось на времени $T = 30\,000$ при времени установления $t_0 = 120\,000$.

Причем в зависимости от значений управляющих параметров наблюдаются как идеальные (рис. 1, *a*), так и неидеальные (рис. 1, *b*) кластерные структуры.

Известно, что в дискретной модели среды [1] в режиме идеальных кластеров частоты всех автогенераторов строго распределены по кластерам. Граница между соседними кластерами соответствует резкому изменению частоты Ω . Возникает вопрос: будут ли наблюдаться скачки частоты в непрерывной среде или граница между идеальными кластерами соответствует непрерывному изменению $\Omega(x)$ (хотя, может быть, и с очень большой производной). Исследование мелкомасштабных

изменений на границах кластеров требует более точного интегрирования с малыми интервалами дискретизации. На рис. 1, *с* приведены фрагменты зависимости $\Omega(x)$ в режиме идеальных кластеров при $g = 1.0$, полученные с одинаковым шагом Δx (который выбран в сто раз меньше, чем в случае рис. 1, *а*) и с разными шагами Δt . При грубом шаге дискретизации времени на графике появляются точки, не принадлежащие кластерам. Между кластерами возникает некая переходная область, соответствующая непрерывному изменению частоты $\Omega(x)$. Однако с уменьшением шага интегрирования по времени размер межкластерной области уменьшается. Можно предположить, что для любого сколь угодно малого шага Δx в пределе $\Delta t \rightarrow \infty$ межкластерная область исчезнет совсем. Это означает, что зависимость $\Omega(x)$ в непрерывной среде претерпевает скачки на границе идеальных кластеров и имеет тот же характер, какой был установлен для цепочки автогенераторов конечной длины.

Вид кластерной структуры в исследуемой системе зависит от коэффициента диффузии g и градиента расстройки $\delta = \Delta_{\max}/l$. В проведенных численных экспериментах исследовалась эволюция кластерных структур при вариации параметров g и l с фиксированной расстройкой $\Delta_{\max} = 0.2$. На рис. 2 на плоскости параметров построены области существования режимов с различным количеством кластеров. Области с восемью и более кластерами являются достаточно узкими и границы между ними на диаграмме не изображены. Кластеры в рассматриваемых областях могут быть как идеальными, так и неидеальными (промежуточными). Наиболее широкие области существования идеальных кластеров выделены серым тоном. Из диаграммы видно, что в исследуемом интервале значений коэффициента диффузии g , при фиксированном значении расстройки Δ_{\max} , структуры с небольшим числом кластеров можно наблюдать только в системах ограниченной длины. Следует отметить, что, увеличивая длину l , мы уменьшаем градиент частотной расстройки δ , что, казалось бы, должно способствовать синхронизации. Однако этого не наблюдается. Количество частотных кластеров растет с увеличением длины системы.

Численно построенные границы областей режимов с различным числом кластеров можно аппроксимировать зависимостями $g \sim \Delta_{\max} l^2$. Той же закономерности удовлетворяет и граница области глобальной синхронизации (т.е. синхронизации всех элементов среды на одной частоте). Она не представлена на рис. 2, так как при рассматриваемых

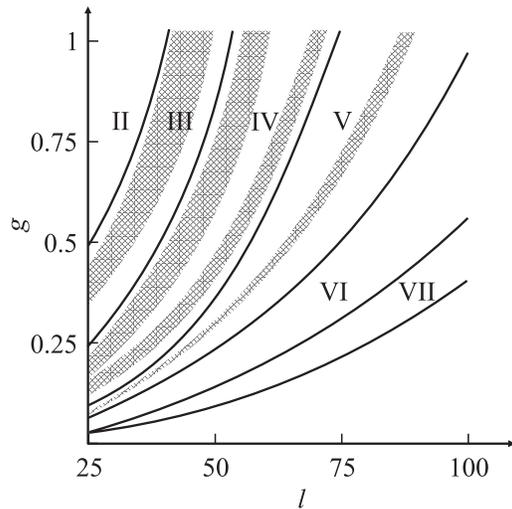


Рис. 2. Диаграмма кластерных режимов непрерывной среды (l) при вариации параметров g и l с фиксированной расстройкой $\Delta_{\max} = 0.2$. Сплошными линиями нанесены границы областей режимов с различным количеством частотных кластеров. Количество кластеров обозначено римскими цифрами. Серым тоном отмечены наиболее широкие области идеальных кластерных структур.

значениях Δ_{\max} и l соответствует слишком большим значениям коэффициента диффузии g . Аналитически полученное условие глобальной синхронизации $g \geq (\Delta_{\max} l^2 / 12\pi)$ отвечает указанной выше общей закономерности и в пределах точности расчетов совпадает с численными результатами. Как следует из работы [1], в дискретной модели при фиксированной расстройке Δ_{\max} граница глобальной синхронизации отвечает закономерности $g \sim \Delta_{\max} N$, где N — длина цепочки автогенераторов. Таким образом, граница глобальной синхронизации различным образом зависит от длины системы в случае непрерывной среды и ее дискретного аналога.

Проведенные численные эксперименты позволяют утверждать, что в непрерывной неоднородной автоколебательной среде с расстройкой собственной частоты вдоль пространственной координаты наблюдается образование кластеров частотной синхронизации. Кластерные структу-

ры в непрерывной среде аналогичны кластерным структурам, которые существуют в цепочках генераторов: они могут быть идеальными и неидеальными. Более того, так же как и в цепочках, в непрерывной среде возможны скачкообразные изменения средней частоты колебаний Ω на границах идеальных кластеров. Исследование поведения среды при изменении управляющих параметров показало, что бифуркационные значения коэффициента диффузии g , соответствующие перестройкам кластерных структур, растут пропорционально квадрату длины системы. Оценка границы области глобальной синхронизации среды отличается от результата, полученного для цепочки генераторов.

Данная работа частично поддержана Фондом гражданских исследований и развития (CRDF) и Министерством образования РФ (грант REC-006).

Авторы благодарны И.А. Хованову и А.В. Шабунину за полезные советы при обсуждении данной работы.

Список литературы

- [1] *Osipov G.V., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. N 6. P. 7198–7207.
- [2] *Ermentrout G.B., Kopell N.* // SIAM J. Math. Ann. 1984. V. 15. P. 215–237.
- [3] *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 2353–2361.
- [4] *Vadivasova T.E., Strelkova G.I., Anishchenko V.S.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 036225.