

09

О новом типе нерегулярного аттрактора в автономной системе

© В.С. Анищенко, М.В. Логинова

Лаборатория нелинейной динамики
Саратовского государственного университета
E-mail: wadim@chaos.ssu.runnet.ru
masha@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 10 ноября 2002 г.

В окончательной редакции 6 января 2003 г.

Исследовались динамические режимы автономной хаотической системы (генератора с инерционной нелинейностью). Был обнаружен новый тип аттрактора и рассчитаны его характеристики (автокорреляционная функция, спектр мощности, ляпуновские показатели), некоторые из которых, как оказалось, напоминают характеристики странного нехаотического аттрактора.

Поводом для проведения настоящих исследований послужила работа [1]. В ней утверждается, что в динамических системах с петлей сепаратрисы седла возможно возникновение притягивающего гиперболического подмножества, т.е. аттрактора гиперболического типа. Этот аттрактор в сечении Пуанкаре имеет структуру аттрактора Плыкина [2]. Результат чрезвычайно интересный, так как до сих пор гиперболические аттракторы, включая аттрактор Плыкина, в конкретных дифференциальных системах экспериментально не наблюдались.

В работе [3] была введена трехмерная автономная динамическая система, в которой в зависимости от параметров реализуются петля сепаратрисы седло-фокуса и переход к режиму петли сепаратрисы седла. Было интересно проверить предсказание [1] и попытаться методами численного моделирования найти режим гиперболического хаоса в этой системе. Сразу отметим, что гиперболический аттрактор пока не найден, однако установлено существование нового типа нерегулярного аттрактора, который, как нам известно, для автономных трехмерных систем наблюдается впервые. Настоящая заметка посвящена описанию свойств найденного нового типа аттрактора.

Классификация аттракторов важна не только с точки зрения фундаментальных представлений о детерминированном хаосе, но имеет прямое прикладное значение. При анализе хаотических сигналов в экспериментах чрезвычайно важно знать статистические характеристики различных типов аттракторов. Без этих знаний решение задачи диагностики существенно затруднено.

Уравнения исследуемой системы имеют вид [3,4]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= mx + y - xz - dx^3, \\ \dot{y} &= -x + \gamma, \\ \dot{z} &= -gz + gI(x)x^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Учет диссипативного члена dx^3 в правой части первого уравнения системы не позволяет траектории уходить на бесконечность при больших значениях m . Это связано с тем, что условие отрицательности дивергенции векторного поля (1) имеет вид [3]:

$$m - g < z + 3dx^2.$$

Поэтому для малых значений m параметром d обычно пренебрегают. Однако в нашем случае его необходимо учитывать.

Исследование системы проводилось численными методами при фиксированных значениях $d = 0.0001$, $\gamma = 0.05$ и вариации параметров в интервалах $2 < m < 2.5$, $0.1 < g < 0.14$. Наблюдалось чередование областей регулярных и хаотических режимов. Типичный вид хаотического аттрактора представлен на рис. 1, *a* (при $g = 0.125$, $m = 2.100$). Численный расчет проводился по схеме Рунге–Кутты с переменным шагом и с заданной степенью точности $\epsilon = 10^{-10}$. При этом шаг интегрирования оказался не выше $\Delta t \approx 10^{-4}$. Поэтому все последующие расчеты проводились по схемам с фиксированным шагом $\Delta t = 10^{-4}$.

Как оказалось, это не единственный тип хаотического аттрактора. Был обнаружен новый тип аттрактора, фазовый портрет которого показан на рис. 1, *b* (это соответствует значению $g = 0.125$, а параметр m при этом равен 2.105). Он существует в очень узкой области параметров (приблизительно от $m = 2.1048$ до $m = 2.1052$). Даже чисто визуальные наблюдения выявляют некоторые различия в структуре хаотических множеств. Однако чтобы более полно судить об этих режимах,

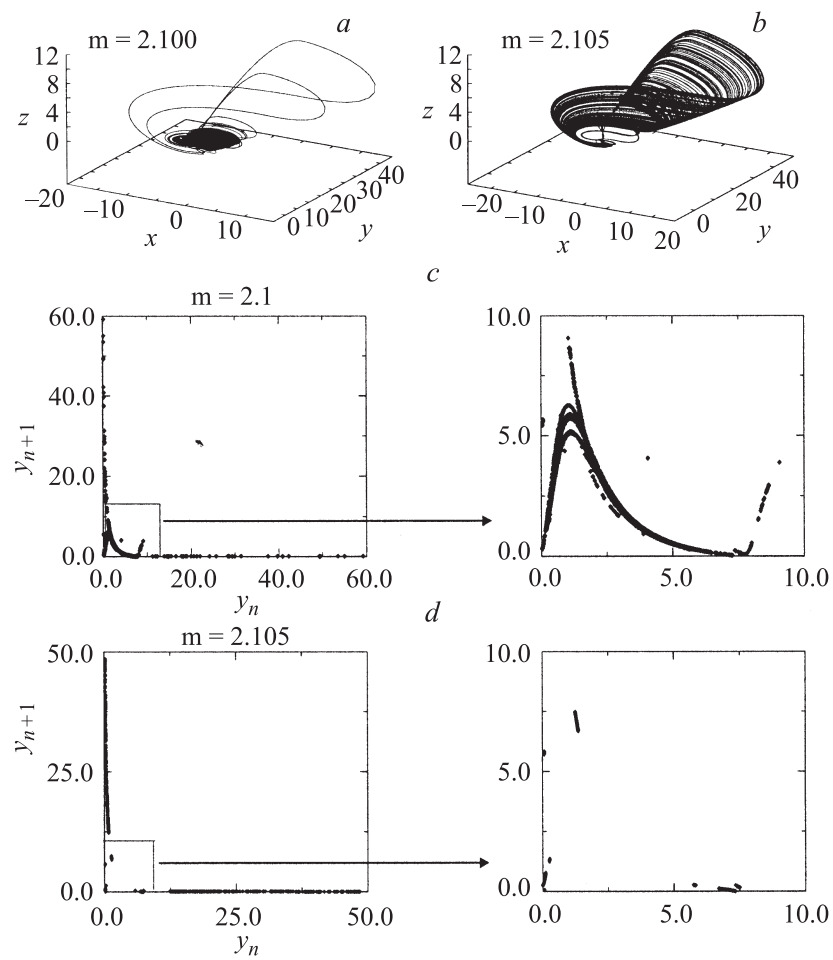


Рис. 1. *a, b* — фазовые портреты аттракторов при $g = 0.125$ ($m = 2.100$ и $m = 2.105$ соответственно), *c, d* — отображения последования для тех же значений параметров.

необходимо исследовать некоторые их характеристики. На рис. 1, *c, d* представлены модельные отображения аттракторов при фиксированном g ($g = 0.125$) и различных m ($m = 2.100$, $m = 2.105$). Сечение

Пуанкаре проводилось плоскостью $x = 0$. Отображение последования для $m = 2.100$ имеет максимум в виде квадратичной параболы. Наличие гладкого максимума свидетельствует о том, что в системе существует гладкое касание устойчивых и неустойчивых многообразий, результатом чего является возникновение устойчивых циклов, следовательно, мы имеем дело с режимом негиперболического хаоса. Отображение последования для $m = 2.105$ (рис. 1, *d*) принципиально отличается от предыдущего случая. Как видно из рис. 1, *d*, для данных значений параметров квадратичный максимум уже отсутствует. В аттракторе нет гладкого касания многообразий, что дает нам право предположить существование какого-то другого типа хаотического аттрактора.

Возникает вопрос, является ли этот аттрактор действительно хаотическим, или, может, это просто цикл очень большого периода, что свойственно для негиперболических режимов? Чтобы ответить на него, необходимо провести расчет ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) для обоих случаев. Эти вычисления были проведены, и их результатом явились следующие значения:

m	λ_1	λ_2	λ_3
2.100	0.052435	0.000020101	-0.21692
2.105	0.0058609	-0.0000084835	-0.72996
2.1065	0.00019758	-0.012658	-1.3897

Из сравнения полученных данных видно, что старшие ляпуновские показатели для двух рассматриваемых хаотических режимов отличаются на порядок. Причем для случая $m = 2.105$ максимальный характеристический показатель очень мал. Однако нельзя считать его нулевым. Для сравнения были рассчитаны ляпуновские показатели для регулярного режима, который наблюдается при $m = 2.1065$. Видно, что нулевой показатель регистрируется с точностью до четвертого знака, следовательно, можно сказать, что, хотя при $m = 2.105$ максимальный показатель довольно мал, этот режим все-таки является хаотическим.

Таким образом, мы получили, что новый режим характеризуется сравнительно малым значением старшего ляпуновского показателя и отсутствием в отображении последования квадратичного максимума.

Произведем расчет автокорреляционной функции (АКФ) и спектра мощности. Результаты представлены на рис. 2.

Из рис. 2, *a* видно, что для $m = 2.100$ автокорреляционная функция имеет вид, характерный для хаотического негиперболического аттрак-

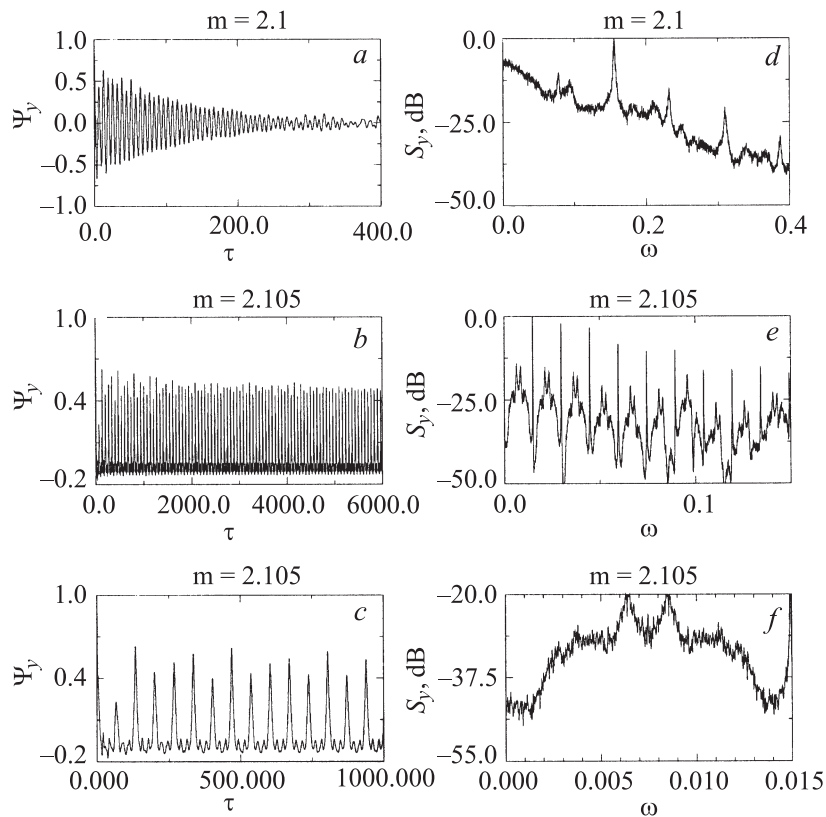


Рис. 2. *a, b* — автокорреляционная функция при $g = 0.125$, $m = 2.100$ и $m = 2.105$ соответственно; *d, e* — спектр мощности (по переменной y) при тех же значениях параметров; *c, f* — автокорреляционная функция и спектр мощности $g = 0.125$, $m = 2.105$ в увеличенном масштабе.

тора, т. е. относительно быстро спадает при росте τ . Совсем по-другому обстоит дело для второго аттрактора (рис. 2, *b, c*). Автокорреляционная функция в этом случае не спадает до нуля даже на достаточно больших временах. Более того, из рисунка видно, что АКФ при больших τ выходит на некоторый постоянный уровень, что характерно для странных нехаотических аттракторов [5,6].

На рис. 2, *d, e, f* приведены спектры мощности по переменной u для обоих аттракторов. Для случая $m = 2.100$ спектр является сплошным, с выбросами на некоторых характерных частотах. Это обычный вид спектра негиперболических аттракторов. Совершенно другой вид спектра при $m = 2.105$. Он гораздо более сильно „изрезан“, и его максимум смещен в сторону более низких частот, а структура напоминает сингулярно-непрерывный спектр [6]. (Участок спектра, показанный на рис. 2, *f*, повторяется на интервале $[0.015:0.03]$). Это снова наводит на мысль о странном нехаотическом аттракторе.

Для сравнения был проведен расчет спектра мощности устойчивого периодического решения (реализующегося вблизи исследуемого аттрактора). Оказалось, что некоторые пики спектра совпадают с выбросами в спектре хаотического аттрактора при $m = 2.105$. Это можно объяснить двумя причинами: либо цикл стал неустойчивым, но траектория движется в его окрестности, либо он остался устойчивым, и мы наблюдаем сосуществование двух режимов — хаотического и регулярного, вследствие погрешности интегрирования. Расчеты, проведенные нами с повышенной точностью $\epsilon = 10^{-10}$, подтвердили первую причину. Многотактный периодический режим при переходе к новому хаотическому аттрактору становится неустойчивым (его мультипликатор выходит за пределы единичной окружности). Однако в силу высокой, но конечной точности счета нельзя исключать возможность существования какого-либо другого устойчивого цикла и явления перемежаемости типа „цикл–хаос“, обусловленного ошибками вычислений.

На основании проведенной работы можно сделать следующие выводы. Смещение особой точки системы и введение дополнительной диссипативной нелинейности в обычные уравнения модифицированного генератора с инерционной нелинейностью привело к возникновению в системе нового хаотического режима. Этот режим демонстрирует некоторые свойства, близкие к свойствам странного нехаотического аттрактора (СНА), а именно:

старший ляпуновский показатель очень мал (хотя и не равен нулю, как для СНА);

АКФ спадает до некоторого ненулевого уровня и далее уже не убывает;

спектр мощности сильно изрезан и по структуре близок к сингулярно-непрерывному.

Следует отметить тот факт, что ранее странный нехаотический аттрактор в автономных системах не наблюдался. Он был обнаружен лишь в системах с квазипериодическим возбуждением [5–7].

Описанный выше новый тип аттрактора демонстрирует одновременно свойства обычного хаотического аттрактора (положительный ляпуновский показатель, сплошной спектр и расщепление корреляций) и свойства, близкие к свойствам странного нехаотического аттрактора (положительный показатель Ляпунова близок к нулю, АКФ во времени не спадает до нуля, спектр близок по структуре к сингулярно-непрерывному).

Данная работа частично поддержана грантом Американского фонда гражданских исследований и развития (грант REC-006).

Список литературы

- [1] *Belykh V.N.* // Abstracts of International Conference on Differential Equations and Dinamical Systems. Suzdal, august 21–26 2000. P. 13–15.
- [2] *Плыкин Р.В.* // УМН. 1980. Т. 35. № 3. С. 94–104.
- [3] *Анищенко В.С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1986.
- [4] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 2000.
- [5] *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* // *Physica D.* 1984. V. 13. P. 261.
- [6] *Pikovsky A.S., Feudel U.* / *J. Phys. A.* 1994. V. 27. P. 5209.
- [7] *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.* // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 54. N 3. P. 1–4.