

10

## **Квазиоптическая теория усиления излучения электронным потоком, движущимся над металлической резистивной поверхностью**

© Н.С. Гинзбург, А.М. Малкин, И.В. Железнов, А.С. Сергеев,  
И.В. Зотова

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород  
E-mail: gunzburg@appl.sci-nnov.ru

Поступило в Редакцию 1 августа 2012 г.

В рамках квазиоптического подхода и импедансных граничных условий Леонтовича исследована линейная и нелинейная стадия диссипативной неустойчивости электронного потока, движущегося над металлической резистивной поверхностью. Показано, что указанная неустойчивость может быть использована для усиления излучения коротковолновых диапазонов, включая терагерцовый.

Диссипативная (резистивная) неустойчивость, возникающая при движении электронных пучков вблизи металлических поверхностей с конечной проводимостью, хорошо известна как в электронике СВЧ, так и в физике ускорителей и в рамках линейного гидродинамического описания представляет собой канонический пример связи волн с положительной и отрицательной энергией [1]. Возникающая в результате развития этой неустойчивости паразитная модуляция плотности пучка, а также потери энергии электронов являются важным практическим фактором для работы ускорителей [2]. С другой стороны, в ряде работ рассматривалась возможность использования диссипативной неустойчивости для генерации коротковолнового излучения [3].

Приведенные обстоятельства делают актуальным построение самосогласованной кинетической теории диссипативной неустойчивости, включающей анализ нелинейной стадии процесса. В данной работе для построения подобной теории использована квазиоптическая модель, в рамках которой металлическая поверхность с конечной проводимостью описывается импедансными граничными условиями Леонтовича [4] для тангенциальных компонент амплитуд электрического и магнитного

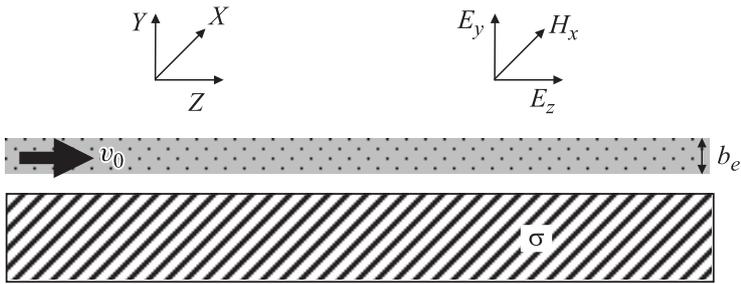


Рис. 1. Модель резистивного усилителя.

полей

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = -w[\mathbf{n}, \mathbf{H}], \quad (1)$$

где  $w = (1 + i)kd/2$  — поверхностный импеданс,  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности,  $d = \sqrt{c\lambda/4\pi^2\sigma}$  — толщина скин-слоя,  $\sigma$  — проводимость металла,  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ . Граничные условия (1) эквивалентны введению поверхностного магнитного тока  $\vec{j}^m = (c/4\pi)[\mathbf{E}, \mathbf{n}]$ .

Далее рассматривается двумерная модель, в которой квазиоптический волновой пучок

$$H_x = \text{Re}(H_x^\omega(z, y)e^{i\omega(t-z/c)}) \quad (2)$$

распространяется над металлической плоскостью с конечной проводимостью и взаимодействует с прямолинейным электронным потоком, движущимся в сильном магнитном поле параллельно поверхности с поступательной скоростью  $v = \beta c$  (рис. 1). Исходно такая система описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta H_x^\omega + k^2 H_x^\omega = i\omega \frac{4\pi}{c^2} j_x^m \delta(y) - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_z^e}{\partial y}. \quad (3)$$

Здесь  $\delta(y)$  — дельта-функция,  $j_z^e$  — гармоника объемного электронного тока на частоте  $\omega$ , наводимого в пучке в результате развития диссипативной неустойчивости. Группировка частиц (модуляция плотности пучка) происходит под действием продольной компоненты электрического поля  $E_z^\omega = (i/k)\partial H_x^\omega/\partial y$  и описывается уравнениями

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = e \text{Re}(E_z^\omega e^{i\theta}), \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \omega \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{c} \right), \quad (4)$$

где  $\varepsilon = mc^2\gamma$  — энергия электронов,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ,  $\theta = \omega(t - z/c)$  — их фаза относительно волнового пучка. В приближении малого изменения энергии частиц  $(\varepsilon - \varepsilon_0)/\varepsilon_0 \ll 1$  уравнения (4) упрощаются и трансформируются к виду

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{e\mu}{mc^2\gamma_0} \operatorname{Re} \left( i \frac{\partial H^\omega}{\partial y} e^{i\theta} \right), \quad (5)$$

где  $\mu = \gamma_0^{-2}\beta_0^{-3}$  — параметр инерционной группировки электронов. В случае первоначально стационарного электронного пучка, равномерно распределенного по фазам влета, граничные условия к уравнению (5) имеют вид:  $\theta|_{z=0} = \theta_0 \in [0, 2\pi)$ ,  $d\theta/dz|_{z=0} = \Delta = k(\beta_0^{-1} - 1)$ .

Электронный ток, наводимый в пучке в результате взаимодействия с электромагнитным полем, представляет собой периодическую функцию времени с периодом  $T = 2\pi/\omega$ , которая может быть разложена в ряд Фурье:

$$j_z^e = j_0 + \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j_{n\omega} e^{in\omega t}.$$

Для гармоник с учетом закона сохранения заряда имеем

$$j_{m\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} j_z^e e^{-in\omega t} d\omega t = \frac{j_0}{\pi} \int_0^{2\pi} j_z^e e^{-in\omega t} d\omega t_0.$$

Невозмущенное распределение тока представим в виде  $j_0 = -I_0 f(y)/b_e$ , где  $I_0$  — полный погонный ток пучка,  $f(y)$  — функция, описывающая невозмущенное распределение плотности электронного потока,  $b_e = \int_0^\infty f(y) dy$  — эффективная ширина потока.

Предполагая, что амплитуда волнового пучка  $H_x^\omega(z, y)$  — медленная функция координат в масштабе длины волны  $\lambda$ , после нормировки получим самосогласованную систему, состоящую из параболического уравнения для амплитуды квазиоптического волнового пучка, возбуждаемого ВЧ электронным током, который в свою очередь находится из решения уравнений движения частиц

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial Z} + i \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial Y^2} + (1 + i)\hat{\omega} \delta(Y) \hat{H} = i \frac{1}{B_e} \frac{\partial}{\partial Y} [F(Y)J], \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \operatorname{Re} \left( i \frac{\partial \hat{H}}{\partial Y} e^{i\theta} \right), \quad J = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta_0, \quad (7)$$

$$\hat{H}|_{z=0} = 0, \quad \theta|_{z=0} = \theta_0 \in [0, 2\pi), \quad \partial\theta/\partial Z|_{z=0} = \hat{\Delta}.$$

Здесь введены следующие безразмерные величины:  $\hat{\omega} = kd/2\sqrt{2G}$  — параметр омических потерь,  $Z = Gkz$ ,  $Y = \sqrt{2G}ky$ ,  $B_e = \sqrt{2G}kb_e$ ,  $\hat{H} = \frac{\sqrt{2e\mu}}{mc^2\gamma_0 k G^{3/2}} H_x^\omega$ ,  $G = (2\sqrt{2} \frac{eI_0}{mc^3} \frac{\mu}{\gamma_0} \lambda)^{2/3}$  — параметр усиления,  $\hat{\Delta} = \Delta/kG$ . Электронный КПД дается соотношениями

$$\eta = \frac{G\hat{\eta}}{\mu(1-\gamma_0^{-1})}, \quad \hat{\eta} = \frac{1}{2\pi B_e} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial\theta}{\partial Z} - \hat{\Delta} \right) \Big|_{z=L} F(Y) d\theta_0 dY, \quad (8)$$

где  $L_z = Gkl_z$  — нормированная длина пространства взаимодействия.

Из уравнений (6), (7) следует закон сохранения энергии в системе электронный пучок–волна:

$$P(Z=L) - P(Z=0) + P_{ohm} = 4\hat{\eta}, \quad (9)$$

где  $P(Z) = \int_0^\infty |\hat{H}(Z)|^2 dY$  — мощность излучения,  $P_{ohm} = 2\hat{\omega} \int_0^L |\hat{H}(Y=0)|^2 dZ$  — нормированные омические потери. Следует отметить, что в отсутствие электронного пучка уравнение (6), описывающее распространение излучения вдоль резистивной поверхности, эквивалентно уравнениям работы [4].

В приближении малого сигнала после линеаризации уравнений движения частиц и их интегрирования по фазам влета для амплитуды ВЧ-тока получим

$$\left( \frac{\partial}{\partial Z} + i\hat{\Delta} \right)^2 J = \frac{\partial \hat{H}}{\partial Y}. \quad (10)$$

Для вывода дисперсионного уравнения, представляя решение (6), (10) в виде  $\hat{H} = \bar{H}e^{-i\Gamma Z}$ ,  $J = \bar{J}e^{-i\Gamma Z}$ , сведем указанные уравнения к уравне-

ниям в обычных производных

$$-i\Gamma\bar{H} + i\frac{d^2\bar{H}}{dY^2} + (1+i)\hat{w}\delta(Y)\bar{H} = i\frac{1}{B_e}\frac{d}{dY}[F(Y)\bar{J}],$$

$$(-\Gamma + \hat{\Delta})^2\bar{J} = -\frac{d\bar{H}}{dY}. \quad (11)$$

Рассмотрим далее для определенности модель тонкого ленточного электронного пучка, движущегося на расстоянии  $b_0$  от резистивной поверхности:  $F(Y) = \delta(Y - b_0)$ . На таком пучке тангенциальная компонента магнитного поля испытывает разрыв

$$\bar{H}|_{Y=b_0+0} - \bar{H}|_{Y=b_0-0} = \frac{\bar{J}}{B_e}. \quad (12)$$

При этом действующая на электроны продольная компонента электрического поля остается непрерывной  $d\bar{H}/dY|_{Y=b_0+0} = d\bar{H}/dY|_{Y=b_0-0}$ . На резистивной поверхности из уравнений (11) следует граничное условие

$$\frac{d\bar{H}}{dY} = (1-i)\hat{w}\bar{H}|_{Y=0}, \quad (13)$$

эквивалентное условию (1). Представляя решение в виде  $\bar{H} = \bar{H}\exp(-gY)$ , получим дисперсионное уравнение, описывающее диссипативную неустойчивость электронного пучка

$$(\hat{\Delta} - g^2)^2(g - (1-i)\hat{w})$$

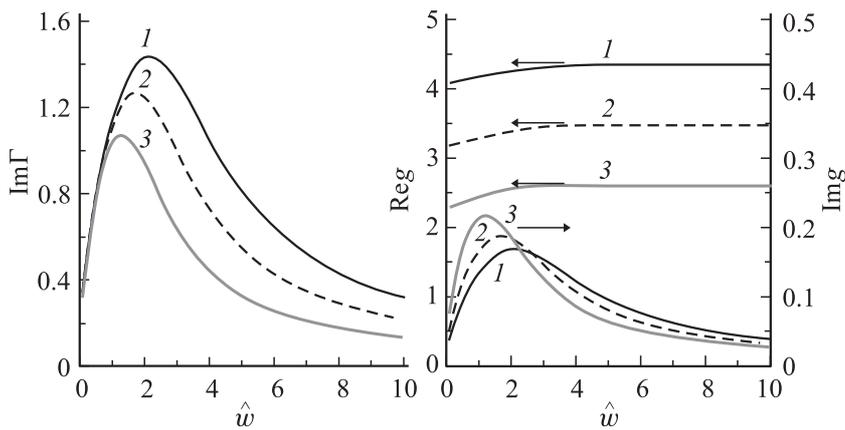
$$= -\frac{1}{2}ge^{-gb_0}\{(g + (1-i)\hat{w})e^{-gb_0} - (g - (1-i)\hat{w})e^{gb_0}\}, \quad (14)$$

где продольный инкремент  $\text{Im}(\Gamma) = \text{Im}(g^2)$ .

В предельном случае, когда зазор между электронным пучком и поверхностью пренебрежимо мал ( $|g|b_0 \ll 1$ ), дисперсионное уравнение (14) принимает вид

$$(\hat{\Delta} - g^2)^2(g - (1-i)\hat{w}) = -g(1-i)\hat{w}. \quad (15)$$

Среди пяти корней уравнения (15) можно выделить единственное решение, которое соответствует нормальной волне с амплитудой, экспоненциально спадающей в поперечном направлении  $\text{Re}g > 0$ , нарастающей в продольном направлении  $\text{Im}g > 0$  и имеющей поток электромагнитной энергии, направленный от пучка к периферии  $\text{Im}g > 0$ . Решение

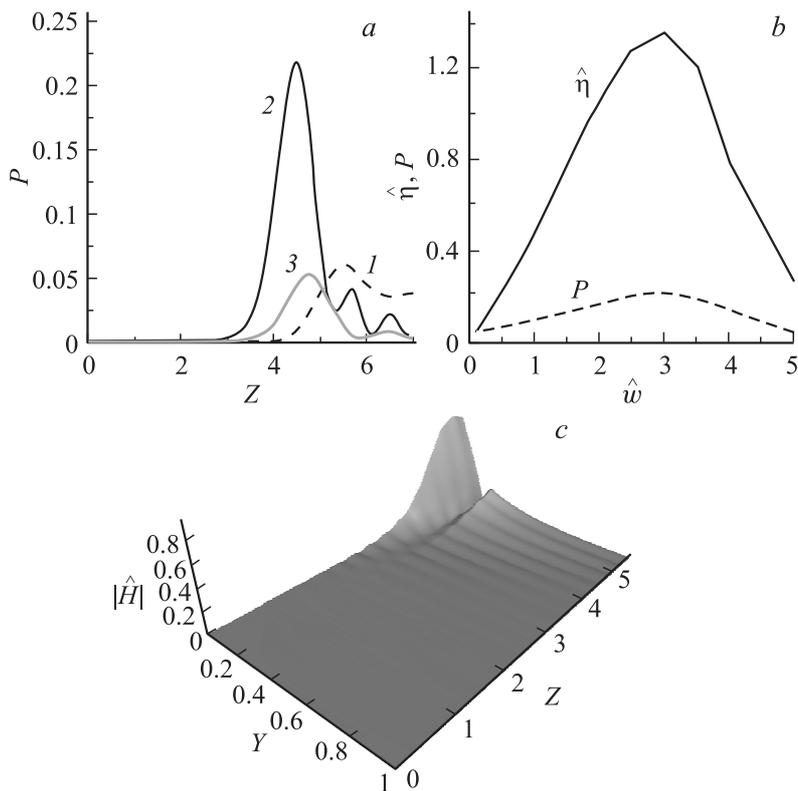


**Рис. 2.** Зависимость инкремента (а), а также реальной и мнимой частей поперечного волнового числа от параметра омических потерь (б): 1 —  $\Delta = 16.5$ , 2 —  $\Delta = 10$ , 3 —  $\Delta = 5$ .

эволюционных уравнений показывает, что при произвольных граничных условиях усиливается поле на линейной стадии имеет характеристики, близкие к указанной моде. На рис. 2 показаны зависимости инкрементов  $\text{Im}\Gamma$ , а также действительной  $\text{Reg}$  и мнимой  $\text{Img}$  частей поперечного волнового числа, от параметра омических потерь  $\hat{\omega}$ . Видно, что при заданном параметре расстройки  $\Delta$  существует оптимальное значение параметра потерь  $\hat{\omega}$ , при котором инкремент достигает максимального значения.

На рис. 3 представлены результаты моделирования нелинейной стадии процесса усиления. Заметим, что в отличие от линейной теории здесь моделировалось излучение электронного пучка конечной толщины. Тем не менее из рис. 3, а, б видно также существование оптимального значения параметра потерь  $\hat{\omega}$ , при котором излучаемая мощность  $P|_{z=L}$  достигает максимума. При этом во всех случаях пространственная структура поля имеет вид прижатой поверхностной волны (рис. 3, в).

На основании развитой теории проведем оценки эффективности режима усиления терагерцового излучения  $\lambda = 0.3 \text{ mm}$  при пролете релятивистского электронного пучка с энергией частиц 1 MeV, погонной



**Рис. 3.** Результаты моделирования нелинейной стадии процесса усиления при  $\hat{\Delta} = 16.5$ : *a* — зависимость мощности волнового пучка от продольной координаты при различных значениях параметра омических потерь: *1* —  $\hat{w} = 0.3$ , *2* —  $\hat{w} = 3$ , *3* —  $\hat{w} = 5$ ; *b* — зависимость максимальной выходной мощности и приведенного КПД от параметра омических потерь; *c* — пространственное распределение амплитуды усиливаемого волнового пучка:  $\hat{w} = 0.3$ .

плотностью тока  $1 \text{ kA/cm}$  и шириной  $b_e = 0.1 \text{ mm}$  над поверхностью из нихрома с проводимостью  $\sigma = 7.7 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Указанные физические параметры соответствуют следующим нормированным величинам:  $G = 3.6 \cdot 10^{-3}$ ,  $B_e = 0.2$ ,  $\hat{w} = 0.27$ ,  $\hat{\Delta} = 16.5$ . На основании рис. 3, *b* получим, что при входной мощности сигнала порядка  $60 \text{ W/cm}$  вы-

ходная мощность излучения  $0.6 \text{ MW/cm}$ . Это соответствует коэффициенту усиления  $40 \text{ dB}$ , который достигается при нормированной длине  $L_z = 6.4$  или  $l_z = 8.4 \text{ cm}$  в физических переменных. При достаточно высоком усилении эффективность энергоотдачи электронного пучка относительно низка: в рассматриваемом примере волновой КПД, т.е. отношение мощности излучения к мощности электронного потока, не превышает  $0.06\%$ . Заметим, что электронный КПД, определяемый соотношением (8), составляет  $\sim 0.5\%$ . Следовательно, значительная часть энергии электронного потока трансформируется в омические потери. При заданных параметрах пучка и частоте падающего сигнала мощность излучения может быть увеличена до  $2.3 \text{ MW/cm}$  при использовании поверхности с оптимальной проводимостью  $\sigma = 6 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$  ( $\hat{w} = 3$ ), но при этом, как следует рис. 3, *b*, происходит дальнейшее увеличение доли омических потерь в балансе мощностей.

Таким образом, на основе диссипативной неустойчивости электронного потока, движущегося вдоль резистивной поверхности, могут быть получены достаточно высокие коэффициенты усиления излучения коротковолновых, в частности терагерцового, диапазонов при относительно низкой эффективности энергообмена. Тем не менее абсолютные значения выходных мощностей в сочетании с компактностью делают оправданным продолжение исследований усиления и генерации волн на основе диссипативной неустойчивости. Важным вопросом, оставшимся за рамками данного сообщения, является вопрос ввода и вывода излучения. В качестве одного из решений здесь может быть использование периодических брэгговских структур [5], для описания которых также может быть использован квазиоптический подход [6]. Заметим, что брэгговские структуры могут быть применены в качестве частотно-селективных отражателей для реализации генераторных режимов на основе диссипативной неустойчивости.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 12-02-01152-а.

## Список литературы

- [1] Незлин М.В. // УФН. 1976. Т. 120. В. 3. С. 481–495.
- [2] Лебедев А.Н., Шальнов А.В. Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991. 627 с.

- [3] *Ораевский А.Н., Сметанин И.В.* // Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 62. В. 3. С. 242–246.
- [4] *Леонтович М.А.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1944. Т. 8. № 1. С. 16–21.
- [5] *Климов В.В.* Наноплазмоника. М. : Физматлит, 2009. 480 с.
- [6] *Гинзбург Н.С., Заславский В.Ю., Малкин А.М., Сергеев А.С.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. В. 13. С. 31–39.