

01

## **Модель коронного разряда с тонкой иглы в режиме ограничения тока пространственным зарядом**

© Г.Ш. Болтачев, Н.М. Зубарев

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург  
E-mail: nick@ier.uran.ru

Поступило в Редакцию 8 ноября 2011 г.

Найдены точные самоподобные решения для распределения электрического поля и плотности заряда во внешней зоне униполярного коронного разряда с острия, представляющего собой тонкую иглу. Решения выходят за рамки традиционно используемого приближения Дейча о малости влияния объемного заряда на форму эквипотенциальных поверхностей. Исходя из предположения, что коронирует часть иглы заданного размера, найдена величина тока насыщения разряда.

Особенностью коронного разряда постоянного тока является существенное влияние пространственного заряда ионов, дрейфующих от узкой зоны ионизации вблизи активного (коронирующего) электрода к пассивному (некоронирующему) электроду. Распределения электрического поля и потока заряженных частиц для различных конфигураций электродов рассматривались во множестве работ, начиная с работы Таунсенда [1]. Задача может быть решена аналитически в одномерных случаях со сферической, цилиндрической и плоской симметрией (см., например, [2]); также был найден ряд точных нетривиальных решений [3,4]. Для электродов относительно сложной геометрии, в частности, для системы электродов „игла–плоскость“ аналитические решения получить не удается, и в большинстве исследований используется гипотеза Дейча [5] о том, что пространственный заряд слабо искажает форму эквипотенциальных поверхностей.

В данной работе мы покажем, что задача о распределении поля и плотности заряда допускает точное решение в модельной ситуации, когда активный электрод представляет собой бесконечно тонкую иглу, а толщина зоны ионизации считается пренебрежимо малой. Это соответ-

ствует предельному случаю, в котором радиус кривизны эмитирующего электрода мал по сравнению с масштабом всей системы, в частности с межэлектродным расстоянием. Следует отметить, что в режиме ограничения тока объемным зарядом именно заряд, а не геометрия вершины острия, определяет распределение электрического поля на периферии [3].

Выпишем уравнения, описывающие стационарное дрейфовое движение заряженных частиц во внешней зоне униполярного коронного разряда постоянного тока. Положим, что скорость дрейфа носителей заряда ( $v$ ) прямо пропорциональна напряженности электрического поля:  $v = \mu E$ , где  $\mu$  — подвижность. Распределение потенциала электрического поля ( $E = -\nabla\varphi$ ) определяется уравнением Пуассона

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{1}$$

где  $\rho$  — плотность электрического заряда,  $\varepsilon$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды. Распределение плотности заряда определяется уравнением непрерывности, которое для стационарного потока заряженных частиц имеет вид  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ , где  $\mathbf{j} = \rho\mu E$  — плотность электрического тока. Это уравнение можно переписать с использованием потенциала  $\varphi$ . При условии  $\mu = \text{const}$  имеем

$$\nabla \cdot (\rho\nabla\varphi) = 0. \tag{2}$$

Будем искать решение уравнений (1) и (2) в виде

$$\varphi(R, \theta) = UA(\theta)(R/L)^\gamma, \quad \rho(R, \theta) = -\varepsilon UL^{-2}B(\theta)(R/L)^{\gamma-2}, \tag{3}$$

где  $R$  — расстояние до вершины острия,  $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от оси симметрии задачи (положение иглы задается условием  $\theta = \pi$ ),  $L$  — характерный пространственный масштаб (межэлектродное расстояние),  $U$  — потенциал поля на расстоянии  $L$  от вершины (приложенная разность потенциалов),  $\gamma$  — неизвестный показатель, а  $A$  и  $B$  — безразмерные функции. Представление решения в виде (3) соответствует разделению переменных в сферической системе координат. Распределения электрического поля и плотности заряда, описываемые этими выражениями, являются масштабно-инвариантными (самоподобными). Сходные зависимости в двухмерном случае (переменные разделялись в полярных координатах) рассматривались в работе [3], в которой

электрод считался клиновидным. Для свободного движения заряженных частиц редуция, аналогичная (3), использовалась в работах [6–8].

Подстановка выражений (3) в исходные уравнения (1) и (2) приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для угловых распределений потенциала электрического поля и плотности заряда:

$$\gamma(\gamma + 1)A + A_{\theta\theta} + A_{\theta} \operatorname{ctg} \theta = B, \quad (4)$$

$$\gamma(\gamma - 2)BA + B^2 + B_{\theta}A_{\theta} = 0. \quad (5)$$

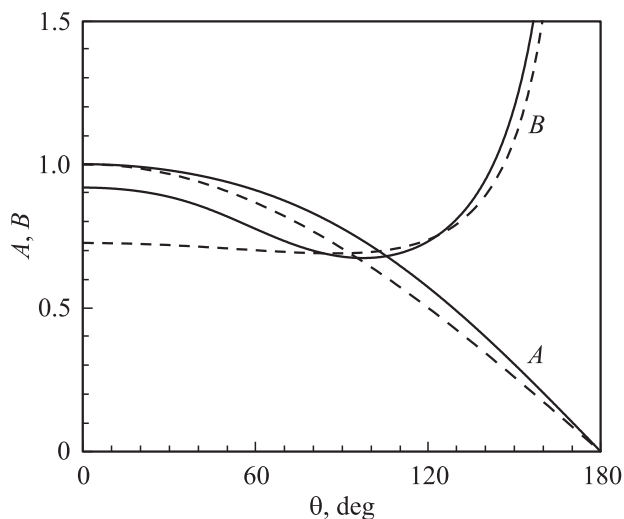
Эти уравнения следует дополнить условиями симметрии  $A_{\theta}(0) = 0$  и  $B_{\theta}(0) = 0$ , а также условием нормировки  $A(0) = 1$ . Потенциал иглы равен нулю, т.е.  $A(\pi) = 0$ . Режим ограничения тока пространственным зарядом применительно к рассматриваемой ситуации означает, что при  $\theta \approx \pi$  для функций  $A$  и  $B$  справедливо

$$A(\theta) \approx p(\pi - \theta), \quad B(\theta) \approx p(\pi - \theta)^{-1}, \quad (6)$$

где  $p$  — некоторая постоянная. Поясним смысл условий (6). При наличии протяженной коронирующей области режим насыщения формально соответствует обращению в нуль напряженности поля на активном электроде по корневому закону:  $E \sim x^{1/2}$ , где  $x$  — расстояние до электрода (см., например, [2]). Для тонкой иглы геометрия задачи локально близка к цилиндрической, т.е. при  $\theta \rightarrow \pi$  и конечном  $R$  все величины зависят только от расстояния до оси симметрии  $r \approx (\pi - \theta)R$ . Точным решением для цилиндрически симметричного распределения электрического поля в режиме ограничения тока пространственным зарядом является  $E \sim (1 - r_0^2/r^2)^{1/2}$ , где  $r_0$  — радиус активного электрода. Рассматриваемый в данной работе случай бесконечно тонкой иглы соответствует пределу  $r_0 \rightarrow 0$ , в котором будет выполняться соотношение  $E \approx \operatorname{const}$ , согласующееся с первым условием из [6]. В соответствии со вторым условием плотность заряда обращается в бесконечность при  $\theta \rightarrow \pi$ ; при этом конечной будет величина  $A_{\theta}B(\pi - \theta)$ , определяющая поток заряженных частиц.

В результате численного решения уравнений (4) и (5) были определены значения параметров модели:  $\gamma \approx 0.715$  и  $p \approx 0.59$ . Найденные угловые зависимости  $A(\theta)$  и  $B(\theta)$  приведены на рисунке. Отметим, что они с приемлемой точностью описываются соотношениями

$$A(\theta) \approx \cos(\theta/2), \quad B(\theta) \approx 4^{-1} \cos^{-1}(\theta/2) + [\gamma(\gamma + 1) - 3/4] \cos(\theta/2). \quad (7)$$



Угловые зависимости потенциала электрического поля и плотности заряда  $A(\theta)$  и  $B(\theta)$ . Сплошные линии — численный расчет; штриховые — формулы (7).

Данные выражения удовлетворяют всем необходимым граничным условиям; они дают точное решение уравнения (4) и асимптотическое решение уравнения (5) в пределе  $\theta \rightarrow \pi$ , где возникает сингулярность. Тогда для распределения потенциала поля можно считать

$$\varphi(R, \theta) \sim R^\gamma \cos(\theta/2).$$

Соответствующие этому выражению эквипотенциальные поверхности задаются уравнением

$$R(\theta) \approx R(0) \cos^{-\gamma}(\theta/2). \tag{8}$$

Важно отметить, что полученные решения выходят за рамки приближения Дейча. Действительно, в отсутствие пространственного заряда распределение потенциала электрического поля ( $\varphi_0$ ) вблизи иглы (конуса с углом полураствора  $\alpha$  в пределе  $\alpha \rightarrow 0$ ) будет определяться выражением [9]

$$\varphi_0(R, \theta) \sim R^\lambda [1 + 2\lambda \ln \cos(\theta/2)], \quad \lambda \approx -(2 \ln \alpha)^{-1},$$

что соответствует эквипотенциальным поверхностям, описываемым формулой

$$R(\theta) \approx R(0) \cos^{-2}(\theta/2). \quad (9)$$

Видно, что уравнения (8) и (9) имеют сходную структуру, но при этом показатель степени при косинусе отличается в них почти в три раза. Как следствие, использование приближения Дейча не способно дать адекватной аппроксимации для формы эквипотенциальных поверхностей, и следует использовать точные самоподобные решения вида (3).

При построении решений для распределения потенциала во внешней зоне коронного разряда с тонкого острия мы не задавали геометрию пассивного электрода. Формально за противоэлектрод можно принять любую эквипотенциальную поверхность, в частности, поверхность  $\varphi(R, \theta) = U$ . В этом случае электрод-коллектор будет иметь чашеобразную форму. Близкая геометрия электродов „острие–полусфера“ исследовалась в экспериментальной работе [10]. Как было установлено, подобная геометрия имеет определенные преимущества перед более распространенной системой „острие–плоскость“. Использование полусферического некоронирующего электрода вместо плоского значительно (приблизительно в 1.7 раза) увеличивает предельный ток разряда. При произвольной геометрии противоэлектрода полученные решения можно рассматривать как асимптотические, описывающие распределение потенциала и плотности заряда лишь на масштабах, много меньших межэлектродного.

В заключение определим величину тока коронного разряда. Напряженность поля на боковой поверхности иглы в соответствии с (3) и (6) есть  $|\mathbf{E}|_{\theta=\pi} = pUL^{-\gamma}R^{\gamma-1}$ , т.е. она бесконечна на вершине острия и убывает на периферии. Для основанной на решениях вида (3) модели вся поверхность иглы коронирует вне зависимости от напряженности поля. В реальной ситуации коронировать будет лишь область иглы с достаточно большими значениями поля. Будем считать, зона ионизации имеет конечный размер  $H$ , т.е. она ограничивается интервалом  $0 \leq R \leq H$ . Интегрируя угловую компоненту плотности тока (нормальную к поверхности иглы) в данном интервале  $R$ , находим для полного тока

$$I = 2\pi\mu \int_0^H \lim_{\theta \rightarrow \pi} [(\pi - \theta)\rho\varphi_\theta] dR = \frac{2\pi p^2}{(2\gamma - 1)} \cdot \frac{\mu\epsilon U^2 H^{2\gamma-1}}{L^{2\gamma}} \approx 5.1 \frac{\mu\epsilon U^2 H^{0.43}}{L^{1.43}}.$$

Таким образом, ток, как это характерно для тока насыщения коронного разряда (см., например, [2]), пропорционален квадрату приложенной разности потенциалов.

Данная работа выполнена в рамках программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“ (проект 12-П-2-1023) при поддержке РФФИ (проект 11-08-00434).

## Список литературы

- [1] *Townsend J.S.* // *Phil. Mag.* 1914. V. 28. P. 83.
- [2] *Sigmund R.S.* // *J. Appl. Phys.* 1982. V. 53. P. 891.
- [3] *Felici N.J.* // *Direct Current.* 1963. V. 8. P. 252.
- [4] *Smith S.A.* // *IMA J. Appl. Math.* 1987. V. 39. P. 189.
- [5] *Deutsch W.* // *Ann. Phys.* 1933. V. 16. P. 588.
- [6] *Finn J.M., Antonsen T.M., Manheimer W.M.* // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1988. V. 16. P. 281.
- [7] *Болтачев Г.Ш., Зубарев Н.М.* // *Письма в ЖТФ.* 2007. Т. 33. В. 21. С. 25.
- [8] *Boltachev G.Sh., Zubarev N.M., Zubareva O.V.* // *Phys. Rev. E.* 2008. V. 77. Art. N 056607.
- [9] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука. 1982.
- [10] *Козлов Б.А., Соловьев В.И.* // *ЖТФ.* 2006. Т. 76. В. 7. С. 1.