01

Присоединенные волны в круглом двухслойном экранированном волноводе

© В.А. Малахов, А.С. Раевский, С.Б. Раевский

Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород
E-mail:physics@nntu.nnov.ru

Поступило в Редакцию 13 сентября 2010 г.

Показана возможность существования в круглом двухслойном экранированном волноводе присоединенных волн, которые в отличие от нормальных волн направляющих электродинамических структур имеют линейную зависимость поля от продольной координаты.

Для краевых задач, к которым сводится исследование собственных волн направляющих структур, можно сформулировать присоединенные краевые задачи, дифференциальные уравнения которых и системы граничных условий образуются [1] дифференцированием по собственному значению соответственно исходного дифференциального уравнения и системы граничных условий. Решения присоединенных краевых задач описывают так называемые присоединенные волны [2,3], характерной особенностью которых является наличие степенной зависимости их амплитуд от продольной координаты.

Проявляемое в последнее время внимание к особенностям решений несамосопряженных краевых электродинамических задач [4,5] позволило выявить [6] новый класс волн, которые получили название комплексных (КВ) [7]. Это волны с комплексными волновыми числами в направляющих структурах без диссипации энергии. Оказалось, что они заполняют широкие интервалы частотных диапазонов направляющих структур наряду с обычными распространяющимися и запредельными (реактивно затухающими) волнами и оказывают принципиальное влияние на работу линий передачи и устройств на их основе. Комплексные решения дисперсионных уравнений волн направляющих структур, описываемых несамосопряженными краевыми задачами, являются наиболее общими. Дисперсионные характеристики КВ образуют „мосты“ между характеристиками распространяющихся и запредельных волн. В точках

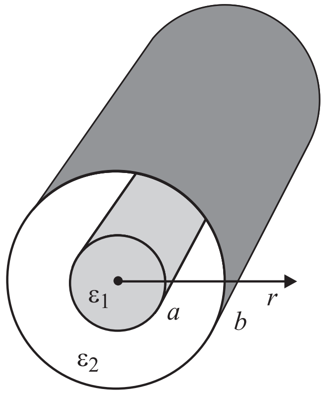

Рис. 1. Круглый двухслойный экранированный волновод.

жордановой кратности волновых чисел нормальных волн, где возникают КВ, образуются, как показывается в настоящей работе, также присоединенные волны, обеспечивающие полноту системы нормальных волн направляющей структуры, необходимую для корректной постановки дифракционных задач [8,9]. Это стимулирует интерес к присоединенным волнам, которые имеют свои принципиальные особенности. К настоящему времени они практически не изучены. Имеются всего лишь предположительные высказывания об их особых свойствах [2,3]. В связи с этим конкретные сведения о присоединенных волнах, по-видимому, будут злободневными и в плане развития численно-аналитических методов решения различных дифракционных задач, к которым сводится расчет функциональных узлов СВЧ- и КВЧ-диапазонов, и в плане определения перспектив их самостоятельного практического использования. Что касается комплексных волн, то, как следует из последних публикаций [8,9], они в дифракционных задачах играют принципиальную роль. Таким образом, интерес к КВ и связанным с ними присоединенным волнам является достаточно обоснованным и устойчивым.

В настоящей работе показывается возможность существования присоединенных волн в круглом двухслойном экранированном волноводе с соосными слоями (рис. 1). Поля волн рассматриваемой направляющей структуры описываются продольными компонентами электрического и магнитного векторов Герца, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi_z^{e,m}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z^{e,m}}{\partial z^2} + \varepsilon\mu\omega^2 \Pi_z^{e,m} = 0, \tag{1}$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты.

Решение уравнения (1), описывающее присоединенные волны, ищем в виде

$$\Pi_z^{e,m} = \left[R(r)f(z) + \overline{R}(r)\overline{f}(z)\right]\begin{cases}\cos n\varphi,\\ \sin n\varphi.\end{cases} \tag{2}$$

Функции, входящие в (2), удовлетворяют уравнениям:

$$R''(r) + R'(r)\Big/r + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R(r) = 0, \tag{3}$$

$$\overline{R''}(r) + \overline{R'}(r)\Big/r + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\overline{R}(r) = R(r), \tag{4}$$

$$f''(z) + \beta^2 f(z) = -\overline{f}(z), \tag{5}$$

$$\overline{f''}(z) + \beta^2\overline{f}(z) = 0, \tag{6}$$

где поперечное α и продольное β волновые числа связаны соотношением:

$$\varepsilon\mu\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2. \tag{7}$$

Поскольку рассматриваемая краевая задача является несамосопряженной, продольное волновое число β — в общем случае комплексная величина: $\beta = \beta_1 + i\beta_2$.

Уравнения (4) и (5) являются [1] присоединенными к уравнениям (3) и (6) соответственно.

В рассматриваемом случае функция $R(r)$ — либо функция Бесселя, если она описывает радиальную зависимость поля во внутреннем слое направляющей структуры, либо комбинация цилиндрических функций 1-го и 2-го рода, удовлетворяющая соответствующему граничному условию (Дирихле или Неймана) на экране, если она описывает радиальную зависимость поля во внешнем слое.

Векторы Герца (2) записываются в виде

$$\Pi_{zq}^{e,m} = \left[C_{nq}^{e,m} R_{nq}^{e,m}(\alpha_q r) + D_{nq}^{e,m}\left(-\frac{iz}{2\beta}\right) R_{nq}^{e,m}(\alpha_q r) + \rho_{nq}(\alpha_q r)\right]$$
$$\times \begin{Bmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{Bmatrix} e^{-i\beta z},$$

где q — номер слоя; $R_{nq}^{e,m}(\alpha_q r)$ — соответствующие решения уравнения (3);

$$\rho_{n1}(\alpha_1 r) = \frac{\pi(\alpha_1 r)^2}{8}\big[-2Y_n(\alpha_1 r)J_{n-1}(\alpha_1 r)J_{n+1}(\alpha_1 r)$$
$$+ J_n(\alpha_1 r)J_{n+1}(\alpha_1 r)Y_{n-1}(\alpha_1 r) + J_n(\alpha_1 r)J_{n-1}(\alpha_1 r)Y_{n+1}(\alpha_1 r)\big],$$

$$\rho_{n2}(\alpha_2 r) = \frac{\pi(\alpha_2 r)^2}{4}\left\{\frac{1}{2}J_n(\alpha_2 r)\big[J_{n+1}(\alpha_2 r)Y_{n-1}(\alpha_2 r)\right.$$
$$+ J_{n-1}(\alpha_2 r)Y_{n+1}(\alpha_2 r)\big] - Y_n(\alpha_2 r)J_{n-1}(\alpha_2 r)J_{n+1}(\alpha_2 r)$$
$$- iJ_n(\alpha_2 r)Y_{n-1}(\alpha_2 r)Y_{n+1}(\alpha_2 r) + \frac{i}{2}Y_n(\alpha_2 r)\big[J_{n+1}(\alpha_2 r)Y_{n-1}(\alpha_2 r)$$
$$\left.+ J_{n-1}(\alpha_2 r)Y_{n+1}(\alpha_2 r)\big]\right\}.$$

Функция
$$\varphi(r) = C_{nq}^{e,m} R_{nq}^{e,m}(\alpha_q r) + \rho_{nq}(\alpha_q r)$$
является присоединенным решением уравнения (4), J_v и Y_v — цилиндрические функции 1-го и 2-го рода.

Граничные условия

$$E_{z1}(r=a) = E_{z2}(r=a), \qquad H_{z1}(r=a) = H_{z2}(r=a),$$
$$E_{\varphi 1}(r=a) = E_{\varphi 2}(r=a), \qquad H_{\varphi 1}(r=a) = H_{\varphi 2}(r=a) \tag{8}$$

приводят к системе функциональных уравнений, зависящих от продольной координаты. Приравнивая в этих уравнениях члены, имеющие линейную зависимость от продольной координаты, и члены, не зависящие

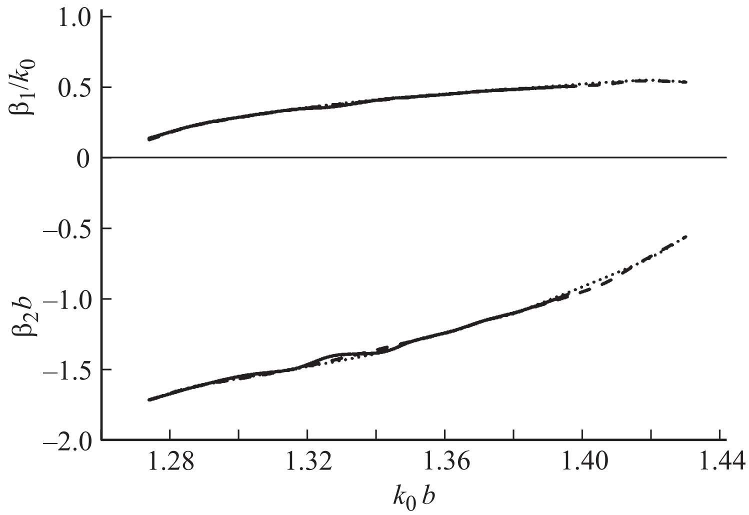

Рис. 2. Решения уравнений (9) — сплошные линии, (10 а) — пунктирные линии, (10 б) — точками в диапазоне существования комплексной волны K_1 в волноводе с параметрами: $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 15$, $b/a = 2.6$.

от z, получаем в первом случае систему четырех линейных однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $D^{e,m}_{n1,2}$, во втором — систему четырех линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C^{e,m}_{n1,2}$. Главные определители указанных систем совпадают и оказываются тождественными определителю системы линейных однородных алгебраических уравнений, получаемых из граничных условий (8) в случае нормальных волн круглого двухслойного экранированного волновода.

Поскольку система линейных однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальные решения только при условии

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

где a_{ik} — элементы матрицы системы после понижения ее порядка вдвое, система линейных неоднородных алгебраических уравнений будет иметь решения только при равенстве нулю ее дополнительных

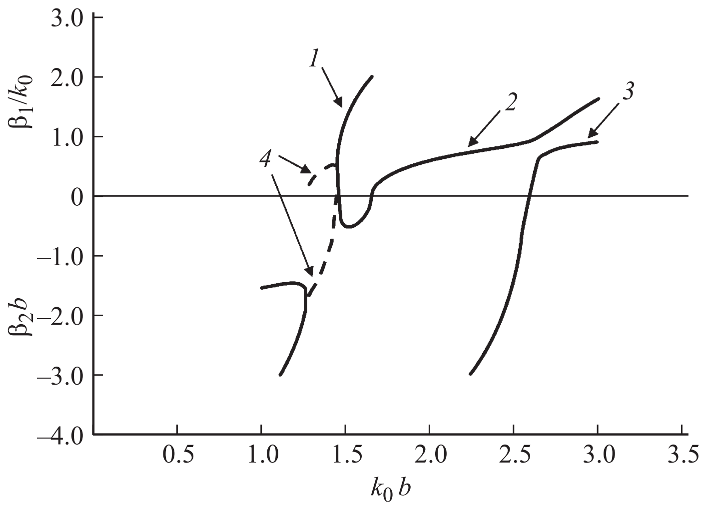

Рис. 3. Дисперсионные характеристики волн круглого двухслойного экранированного волновода с параметрами: $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 15$, $b/a = 2.6$. *1* — волна HE_{11}, *2* — EH_{11}, *3* — HE_{12}, *4* — комплексная волна K_1, образованная волнами HE_{11} и EH_{11}.

определителей:

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \ \text{(а)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = 0, \ \text{(б)} \qquad (10)$$

где c_1 и c_2 — правые части системы неоднородных уравнений после понижения их порядка вдвое.

Решениями дисперсионной задачи для присоединенных волн являются совместные решения системы трех трансцендентных уравнений: (9), (10 а, б). Они представляют собой набор волновых чисел, связанных между собой соотношением (7), которые в силу несамосопряженности краевой задачи являются в общем случае комплексными величинами.

Для совместного решения уравнений (9), (10 а, б) на комплексных плоскостях волновых чисел использовался комбинированный метод поиска комплексных корней трансцендентных уравнений, объединяющий в себе метод Мюллера и метод вариации фазы [5]. Комбинированный

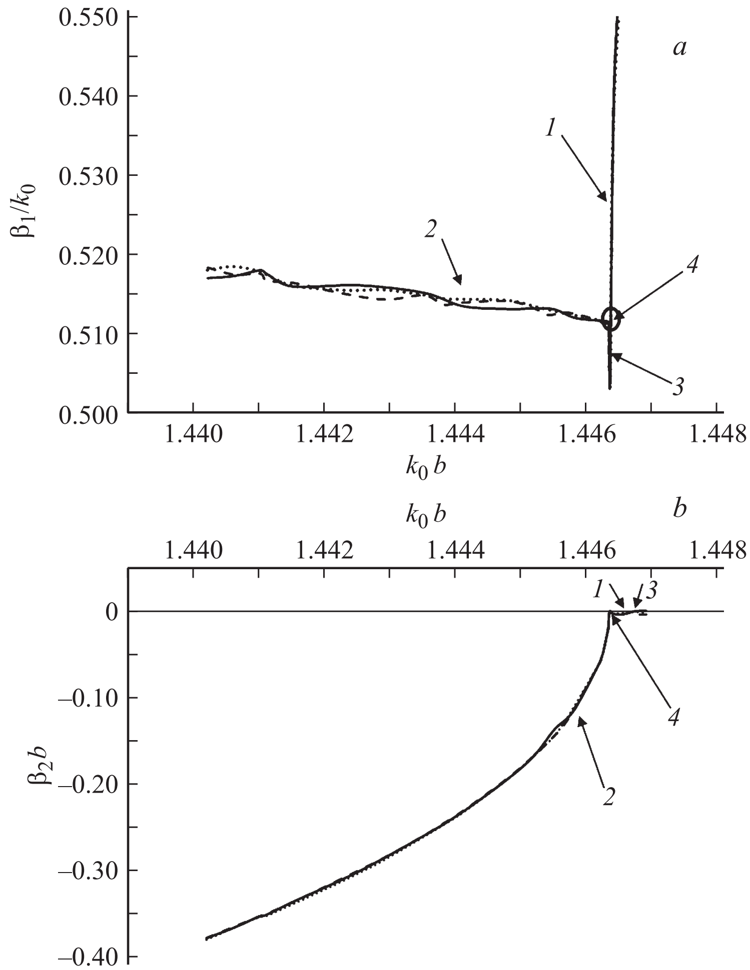

Рис. 4. Действительные (a) и мнимые (b) части продольных волновых чисел волн вблизи точки возникновения присоединенной волны ($\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 15$, $b/a = 2.6$). *1* — волна HE_{11}, *2* — комплексная волна K_1, образованная волнами HE_{11} и EH_{11}, *3* — EH_{11}, *4* — точка образования присоединенной волны.

метод использует быстроту нахождения комплексного корня методом Мюллера и надежность идентификации корня с помощью метода вариации фазы. Метод вариации фазы [5] исключает ложные корни (локальные экстремумы), найденные методом Мюллера.

Численные исследования показали, что ветви решений уравнений (10 а, б) находятся вблизи ветви решений, соответствующей КВ круглого двухслойного экранированного волновода [4–6], получаемой из уравнения (9). На рис. 2 приведены решения указанных уравнений. Как видим, все они расположены в непосредственной близости к характеристике комплексной волны K_1 (рис. 3), но соединяются ветви решений уравнений (9), (10 а, б) лишь в точках дисперсионных характеристик КВ, где последние переходят либо в распространяющиеся, либо в запредельные волны. Эти точки называются [2] точками жордановой кратности волновых чисел нормальных волн. На рис. 3 *a, b* сплошными линиями показаны решения уравнения (9), пунктирными — решения уравнения (10 а), точками — решения уравнения (10 б).

На рис. 4, *a* показан переход комплексной волны в распространяющуюся по действительной части продольного волнового числа, на рис. 4, *b* — по мнимой.

На основании проведенных исследований показано, что в круглом двухслойном экранированном волноводе наряду с нормальными волнами могут существовать присоединенные волны, имеющие линейную зависимость поля от продольной координаты. На плоскостях волновых чисел присоединенные волны обнаруживаются в точках соединения характеристик нормальных волн, соответствующих отправным точкам дисперсионных характеристик КВ. Поэтому существование в направляющей структуре присоединенных волн можно [5,6] рассматривать как необходимое условие существования в ней КВ. Особенности указанных волн позволяют [10] формулировать критерии корректности постановки краевых задач, решаемых в незамкнутой форме.

Физический эффект возникновения присоединенных волн проявляется в увеличении крутизны граничных участков резонансной кривой комплексного резонанса [4,11].

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационой России“ на 2009–2013 гг. ГК № 2310 и 02.740.11.0564.

Список литературы

[1] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
[2] *Краснушкин П.Е., Федоров Е.Н.* // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17. № 6. С. 1129–1140.
[3] *Ильинский А.С., Слепян Г.Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1983.
[4] *Веселов Г.И., Раевский С.Б.* Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988.
[5] *Раевский А.С., Раевский С.Б.* Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. М.: Радиотехника, 2004.
[6] *Раевский А.С., Раевский С.Б.* Комплексные волны. М.: Радиотехника, 2010.
[7] *Раевский С.Б.* // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 1. С. 112–116.
[8] *Раевский А.С., Раевский С.Б., Титаренко А.А.* // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 12. С. 1427–1435.
[9] *Бударагин Р.В., Раевский С.Б., Титаренко А.А.* // Антенны. 2004. В. 8(85). С. 47–53.
[10] *Малахов В.А., Раевский А.С.* // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 5. С. 517–521.
[11] *Иванов А.Е., Раевский С.Б.* // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. № 8. С. 1463–1468.