09

Интервальные оценки времени запаздывания связи по временны́м рядам

© *Д.А. Смирнов, Е.В. Сидак, Б.П. Безручко*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: smirnovda@yandex.ru

Поступило в Редакцию 3 августа 2010 г.

Необходимость оценки запазывания в связях между элементами колебательных ансамблей возникает при анализе систем различной природы, а для ее получения зачастую имеются лишь дискретные записи (временны́е ряды) наблюдаемых колебаний. Рассматривается такое оценивание в случае относительно коротких временны́х рядов и наличия шумов. На основе известной точечной оценки, основанной на моделировании фазовой динамики, предлагается интервальная оценка: введена поправка, устраняющая смещение точечной оценки, и получена формула для доверительного интервала на основе формализма максимального правдоподобия. Работоспособность предложенного подхода иллюстрируется в численном экспермент на системе осцилляторов.

Выявлению запаздывающих связей в структуре нелинейных колебательных систем и количественной оценке времени запаздывания, которое является важной характеристикой, во многом определяющей сложность наблюдаемой динамики, посвящен ряд недавних исследований [1–5]. Интерес к таким системам обусловлен их широкой распространенностью в различных областях — от радиотехники [5] до геофизики [6]. В общем случае знание запаздывания важно для понимания структуры и механизма взаимодействия элементов ансамблей. В частности, при исследовании пространственно отделенных друг от друга систем время запаздывания может характеризовать свойства среды, в которой распространяется возмущение, обеспечивающее воздействие одной системы на другую. Наиболее актуальна задача оценки запаздывания связей по данным наблюдений (временны́м рядам) в условиях нестационарности наличия шумов, помех или других причин, ограничивающих длительность наблюдаемых временны́х рядов [7,8]. Точечная оценка времени запаздывания связи между колебательными системами, основанная на моделировании их фазовой динамики, предложена в работе [4]. Аналогичный подход применялся в [8,9]. Однако при анализе коротких временны́х рядов и наличии шумов важно получить доверительный интервал, показывающий погрешность оценки, чтобы делать достоверный вывод о наличии запаздывания. В данной работе предлагается такая интервальная оценка, и работоспособность подхода иллюстрируется в численном эксперименте.

Согласно известному подходу [4], который наиболее чувствителен к слабым связям между колебательными системами, сначала переходят от записей колебаний наблюдаемых величин $x_1(t)$ и $x_2(t)$ к временны́м рядам фаз колебаний [10]: $\{\phi_1(t_1), \ldots, \phi_1(t_N)\}$ и $\{\phi_2(t_1), \ldots, \phi_2(t_N)\}$, где $t_i = i\Delta t$, Δt — интервал выборки, N — длина ряда. Затем строится эмпирическая модель фазовой динамики $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Форма модельных уравнений выбирается с учетом того, что фазовая динамика периодических автоколебательных систем, возмущенных слабыми шумами и слабо связанных, адекватно описывается стохастическими дифференциальными уравнениями [11,12] вида

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = \omega_1 + G_1\big(\phi_1(t), \phi_2(t - \Delta^*_{2\to1})\big) + \xi_1(t),$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = \omega_2 + G_2\big(\phi_2(t), \phi_1(t - \Delta^*_{1\to2})\big) + \xi_2(t), \qquad (1)$$

где ω_k определяет угловую частоту колебаний, $\xi_k(t)$ — нормальный белый шум с нулевым средним и автоковариационной функцией $\langle \xi_k(t)\xi_k(t')\rangle = \sigma^2_{\xi k}\delta(t - t')$, $\Delta^*_{2\to1}$ и $\Delta^*_{1\to2}$ — запаздывания. При анализе временны́х рядов удобнее рассматривать разностные уравнения, которые можно получить путем интегрирования (1) на интервале конечной ширины τ:

$$\phi_k(t + \tau) - \phi_k(t) = F_k\big(\phi_k(t), \phi_j(t - \Delta^*_{j\to k})\big) + \varepsilon_k(t), \quad k, j = 1, 2, \quad j \neq k, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_k(t) \approx \int\limits_t^{t+\tau} \xi_k(t')dt'$ — нормальный шум с нулевым средним, дисперсией $\sigma^2_{\varepsilon_k} \approx \sigma^2_{\xi_k}\tau$ и линейно спадающей до нуля на интервале $(0, \tau)$ автоковариационной функцией; $F_k(\phi_k, \phi_j)$ — функции, 2π-периодичные по обоим аргументам.

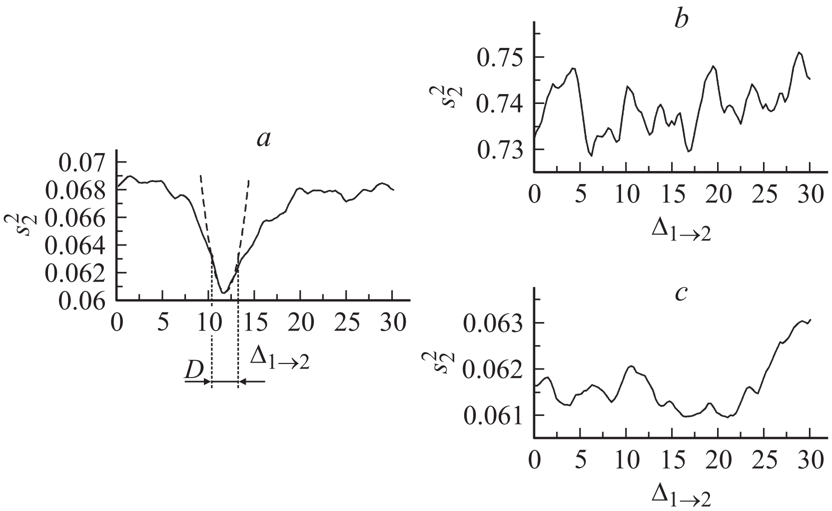

Рис. 1. Графики зависимости $s_2^2(\Delta_{1\to2})$ для системы (4), полученные по временнóму ряду длиной 100 характерных периодов: a — $\sigma_{\xi_1} = 0.6$, $\sigma_{\xi_2} = 0.2$, штриховой линией показана аппроксимирующая парабола; b — $\sigma_{\xi_1} = 0.6$, $\sigma_{\xi_2} = 0.7$; c — $\sigma_{\xi_1} = 0.1$, $\sigma_{\xi_2} = 0.2$.

По временны́м рядам строится модель в форме (2) с тригонометрическими многочленами

$$F_k(\phi_k, \phi_j, \mathbf{a}_k) = w_k + \sum_{(m,n)\in\Omega_k} \big(\alpha_{k,m,n}\cos(m\phi_k - n\phi_j) + \beta_{k,m,n}\sin(m\phi_k - n\phi_j)\big),$$

где Ω_k — диапазон суммирования, $\mathbf{a}_k = (w_k, \{\alpha_{k,m,n}, \beta_{k,m,n}\}_{(m,n)\in\Omega_k})$ — вектор коэффициентов, и пробными временами запаздывания $\Delta_{2\to1}$ и $\Delta_{1\to2}$ вместо искомых истинных значений $\Delta^*_{2\to1}$ и $\Delta^*_{1\to2}$. При этом оптимальные значения $\Delta_{j\to k}$ и $\mathbf{a}_k$ в модели определяются методом наименьших квадратов. А именно, при различных фиксированных $\Delta_{j\to k}$

минимизируется

$$S_k^2(\Delta_{j\to k}, \mathbf{a}_k) = \frac{1}{N - t/\Delta t}$$
$$\times \sum_{i=1}^{N-t/\Delta t} \Big(\phi_k(t_i+\tau) - \phi_k(t_i) - F_k\big(\phi_k(t_i), \phi_j(t_i - \Delta_{j\to k}), \mathbf{a}_k\big)\Big)^2.$$

Ее минимальное значение $s_k^2(\Delta_{j\to k}) = \min\limits_{\mathbf{a}_k} S_k^2(\Delta_{j\to k}, \mathbf{a}_k)$, а соответствующие оценки коэффициентов $\hat{\mathbf{a}}_k(\Delta_{j\to k}) = \arg\min\limits_{\mathbf{a}_k} S_k(\Delta_{j\to k}, \mathbf{a}_k)$. Величина s_k^2 минимизируется как функция $\Delta_{j\to k}$ (рис. 1, a). Точка минимума $\hat{\Delta}_{j\to k} = \arg\min\limits_{\Delta_{j\to k}} s_k^2(\Delta_{j\to k})$ принимается в качестве точечной оценки запаздывания. Параметр τ может быть принят любым, но слишком малые значения ведут к увеличению случайной ошибки оценки $\hat{\Delta}_{j\to k}$ [4], а слишком большие — к росту смещения оценки $\hat{\Delta}_{j\to k}$ [9]. Ниже предлагается поправка, устраняющая смещение $\hat{\Delta}_{j\to k}$ при любом τ, и выводится формула для дисперсии $\hat{\Delta}_{j\to k}$. Это позволяет получить интервальную оценку запаздывания.

При изложении принципа максимального правдоподобия [13] базовым примером является оценивание параметра a для зависимости вида $y = f(x, a) + \eta$, где η — гауссовская случайная величина с нулевым средним, статистически независимая от x. При оценивании по независимой выборке $\{x_i, y_i\}_{i=1}^N$ минимизируют величину $S_y^2(a) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\big(y_i - f(x_i, a)\big)^2$: $\hat{a} = \arg\min\limits_a S_y^2(a)$. Известно, что при достаточно большой длине ряда оценка $\hat{a}$ распределена по гауссовскому закону с дисперсией $\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{2S_y^2(\hat{a})}{N}\Big(\frac{d^2[S_y^2(a)]}{da^2}\Big|_{a=\hat{a}}\Big)^{-1}$. Воспользуемся аналогичным соотношением для определения дисперсии $\hat{\Delta}_{j\to k}$, но учтем, что значения $\varepsilon_k(t)$, разделенные по t интервалом не более τ, статистически зависимы друг от друга. Число независимых значений ε_k не меньше, чем $N\Delta t/\tau$, поэтому дисперсию $\hat{\Delta}_{j\to k}$ можно оценить сверху как

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\Delta}_{j\to k}} = \frac{2(\tau/\Delta t)s_k^2(\hat{\Delta}_{j\to k})}{N - \tau/\Delta t}\left(\frac{d^2[s_k^2(\Delta_{j\to k})]}{d\Delta_{j\to k}^2}\bigg|_{\Delta_{j\to k}=\hat{\Delta}_{j\to k}}\right)^{-1}. \qquad (3)$$

Чтобы найти смещение оценки $\hat{\Delta}_{j\to k}$, заметим, что приращение фазы $\phi_k(t+\tau)-\phi_k(t)$ в (2) приближенно равно $\big(d\phi_k(t')/dt\big)\tau$, где t' — момент времени из отрезка $(t, t+\tau)$. С учетом почти линейного роста фазы $\phi_k(t)$ это приближение является наиболее точным при $t' = t+\tau/2$, т.е. $\phi_k(t+\tau)-\phi_k(t)$ примерно пропорционально $d\phi_k(t+\tau/2)dt$. Значит наименьшая ошибка $s_k^2(\Delta_{j\to k})$ должна быть достигнута при $\Delta_{j\to k}$, сдвинутом на $\tau/2$ относительно истинного $\Delta^*_{j\to k}$. Несмещенной оценкой должна быть $\hat{\Delta}^{corr}_{j\to k} = \hat{\Delta}_{j\to k} + \tau/2$.

При достаточной длине ряда оценка $\hat{\Delta}^{corr}_{j\to k}$ распределена по нормальному закону, так что 95%-ный доверительный интервал для $\Delta^*_{j\to k}$ имеет вид $\hat{\Delta}^{corr}_{j\to k} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j\to k}}$. Чтобы найти $\hat{\sigma}^2_{\hat{\Delta}_{j\to k}}$ по временно́му ряду, нужно оценить вторую производную в (3). Для этого будем аппроксимировать зависимость $s_k^2(\Delta_{j\to k})$ квадратичной параболой в окрестности D точки минимума (рис. 1, a). Наши численные эксперименты показали, что использование D шириной в один характерный период колебаний дает приемлемый результат.

В случае короткого временно́го ряда зависимость $s_k^2(\Delta_{j\to k})$ может не иметь одного четкого определенного минимума (рис. 1, b, c), тогда предложенный формализм неприменим. Это имеет место в двух случаях. Во-первых, при относительно большом уровне шума в „ведомом" осцилляторе ε_k и слабом воздействии $j\to k$ вид графика $s_k^2(\Delta_{j\to k})$ определяется конкретной реализацией шума ε_k, а не связью (рис. 1, b). Во-вторых, при малом уровне шума в „ведущем" осцилляторе ε_j значения s_k^2 оказываются практически одинаковы для различных $\Delta_{j\to k}$ (рис. 1, c), так как значения фазы $\phi_j(t)$ в разные моменты времени t практически однозначно связаны друг с другом. Отметим неожиданное на первый взгляд наблюдение, что наличие шума может приводить к полезным результатам. Это подробно рассмотрено и прокомментировано в работе [4].

Предложенная интервальная оценка запаздывания применялась при анализе ансамблей из 100 пар временны́х рядов от эталонных осцилляторов. По каждой паре рядов рассчитывались значение $\hat{\Delta}^{corr}_{j\to k}$ и 95%-ный доверительный интервал и проверялось, попадает ли $\Delta^*_{j\to k}$ в интервал $\hat{\Delta}^{corr}_{j\to k} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j\to k}}$. Подсчитывалась частота (оценка вероятности) правильных выводов о величине запаздывания n_{true}, т.е. таких ситуаций, когда $\Delta^*_{j\to k}$ принадлежит интервалу $\hat{\Delta}^{corr}_{j\to k} \pm 1.96\hat{\sigma}_{\hat{\Delta}_{j\to k}}$. Интервальная оценка применима, если n_{true} не меньше 0.95, так как доверительный интервал — 95%-ный.

В качестве первой тестовой системы использовались фазовые осцилляторы

$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = \omega_1 + \xi_1(t),$$

$$\frac{d\phi_2(t)}{dt} = \omega_2 + k\sin\big(\phi_1(t - \Delta^*_{1\to 2}) - \phi_2(t)\big) + \xi_2(t), \tag{4}$$

где $\omega_1 = 0.95$, $\omega_2 = 1.05$, $k = 0.1$, $\Delta^*_{1\to 2} = 12$. Для получения временны́х рядов при различных уровнях шума $\sigma^2_{\xi_1}$- и $\sigma^2_{\xi_2}$-уравнения интегрировались методом Эйлера с шагом 0.01. Интервал выборки составлял 0.3 (20 точек на характерном периоде). Длина ряда была принята равной $N = 2000$, т.е. примерно 100 характерных периодов. Величина τ принималась равной четверти периода ($\tau = 1.5$), но результаты схожи при различных τ. Использовались многочлены F_k 3-го порядка аналогично работам [8,9].

На рис. 2, a представлен график зависимости n_{true} от уровня шума в ведущем осцилляторе σ_{ξ_1} при фиксированном $\sigma_{\xi_2} = 0.2$. При больших σ_{ξ_1} величина n_{true} не меньше 0.95, как и требуется. При $\sigma_{\xi_1} < 0.2$ величина n_{true} уменьшается, что соответствует ситуации, показанной на рис. 1, c. На рис. 2, b представлен график зависимости n_{true} от уровня шума в ведомом осцилляторе σ_{ξ_2} при фиксированном $\sigma_{\xi_1} = 0.6$. При небольших σ_{ξ_2} величина n_{true} не меньше 0.95, а при $\sigma_{\xi_2} > 0.3$ уменьшается, что соответствует рис. 1, b. Тесты проводились также на фазовых осцилляторах при других значениях параметров и на осцилляторах Ван-дер-Поля при различных уровнях шума, коэффициентах связи, расстройке частот. Во всех примерах метод дает верные оценки времени запаздывания, если минимум на графике зависимости $s^2_k(\Delta_{j\to k})$ шорошо выражен (аналогично рис. 1, a).

Таким образом, в работе предложена интервальная оценка времени запаздывания связи между осцилляторами. Ее эффективность показана в численном эксперименте. Основным содержательным условием применимости метода является адекватность модели (1) с белыми шумами ξ_k для описания наблюдаемой фазовой динамики. С физической точки зрения время корреляции фазовых шумов в исследуемых системах должно быть гораздо меньше характерного периода колебаний. Поскольку

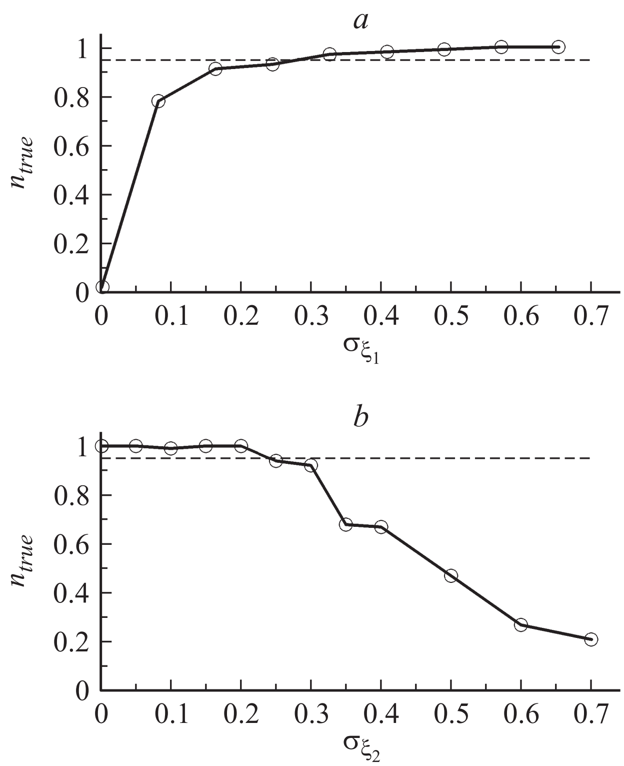

Рис. 2. Вероятность n_{true} правильного вывода о величине запаздывания $\Delta^*_{1\to 2}$, рассчитанная по ансамблю реализаций системы (4): *a* — $\sigma_{\xi_2} = 0.2$, *b* — $\sigma_{\xi_1} = 0.6$. Горизонтальной штриховой линией показан уровень 0.95.

эта модель достаточно универсальна [11,12], то предложенная оценка представляется перспективным средством анализа коротких временны́х рядов для широкого круга практических ситуаций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-02-00081), программ РАН и Министерства образования и науки.

Список литературы

[1] *Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A.* et al. // Eur. Phys. J.D. 2000. V. 10. P. 165–185.
[2] *Voss H.U., Kurths J.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 234. P. 336–344.
[3] *Horbelt W., Timmer J., Voss H.U.* // Phys. Lett. A. 2002. V. 299. P. 513–521.
[4] *Cimponeriu L., Rosenblum M., Pikovsky A.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 046213.
[5] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П.* // ЖЭТФ. 2005. Т . 127. № 3. С. 515–527.
[6] *Tziperman E., Cane M.A., Zebiak S.E.* et al. // J. Climate. 1998. V. 11. P. 2191–2199.
[7] *Meeren H.K., Pijn J.P., van Luijtelaar E.L.* et al. // J. Neurosci. 2002. V. 22. P. 1480–1495.
[8] *Мохов И.И., Смирнов Д.А.* // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42. № 5. С. 650–667.
[9] *Smirnov D., Barnikol U.B., Barnikol T.T.* et al. // Europhys. Lett. 2008. V. 83. P. 20003.
[10] *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* // Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
[11] *Kuramoto Y.* // Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
[12] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Int. J. Bifurc. Chaos. 2000. V. 10. P. 2291–2305.
[13] *Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З.* // Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.