

05;11

## Сила трения между фрактальной шероховатой поверхностью и эластомером

© В.Л. Попов, А.Э. Филиппов

Берлинский технический университет, Берлин, Германия

E-mail: v.popov@tu-berlin.de

Донецкий физико-технический институт, Украина

Поступило в Редакцию 2 февраля 2010 г.

В рамках метода редукции размерности проведено численное моделирование силы трения между фрактальной шероховатой поверхностью и модельным эластомером. Показано, что для эластомеров, у которых мнимая часть комплексного модуля сдвига намного больше действительной части, коэффициент трения пропорционален среднеквадратичному значению градиента поверхностного профиля твердой поверхности. Эмпирическое значение коэффициента пропорциональности близко к единице.

Трение между твердыми шероховатыми поверхностями и эластомерами представляет практический интерес для большого количества приложений. Прежде всего в результате работ Гроша [1,2] было установлено, что трение эластомеров обусловлено внутренними потерями в материале и поэтому тесно связано с реологией эластомера. Простая аналитическая оценка показывает [3], что коэффициент трения между эластомером и твердой шероховатой поверхностью определяется согласно

$$\mu = \xi \nabla z \frac{G''(kv)}{|\hat{G}(kv)|}, \quad (1)$$

где  $\nabla z$  есть среднеквадратичное значение наклона поверхности (градиента поверхностного профиля  $z = z(x, y)$ ),  $\hat{G}(\omega)$  есть комплексный, зависящий от частоты модуль сдвига эластомера,  $G''(\omega)$  — его мнимая часть,  $k$  есть характерный волновой вектор поверхностного профиля твердой поверхности,  $v$  — скорость скольжения и  $\xi$  — безразмерная константа порядка единицы;  $|\hat{G}(\omega)|$  есть абсолютное значение комплексного модуля. Поскольку уравнение (1) получается в результате качественных оценок, точное значение постоянной  $\xi$  остается неизвестным

и может быть получено только в рамках более точного численного моделирования. Уравнение (1) приобретает особенно простой вид в том случае, если комплексный модуль упругости является чисто мнимым (либо мнимая часть модуля сдвига много больше действительной части). В этом случае отношение  $G''(\omega)/|\hat{G}(\omega)|$  тождественно равно единице и уравнение (1) сводится к

$$\mu = \xi \nabla z. \quad (2)$$

Поскольку в этом случае коэффициент трения оказывается не зависящим от характерного волнового вектора профиля твердой поверхности, логично предположить, что уравнение (2) для таких эластомеров будет справедливо также и для поверхностей, не имеющих характерного волнового вектора, в том числе для фрактальных поверхностей. Настоящая статья посвящена одновременно проверке этой гипотезы и численному вычислению постоянной  $\xi$ .

Для проверки уравнения (2) мы используем простейшую среду, описываемую чисто мнимым модулем сдвига

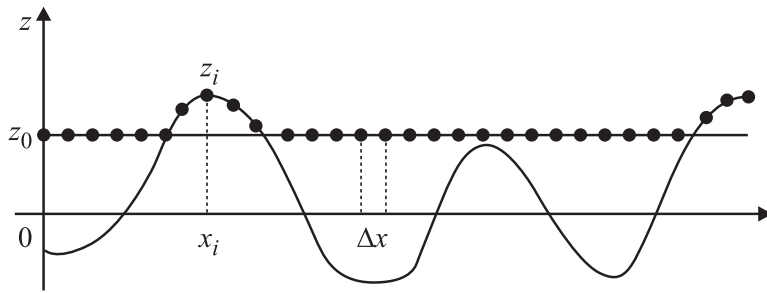
$$\hat{G} = i\eta\omega. \quad (3)$$

Тем самым условия применимости уравнения (2) выполнены. Моделирование производится в рамках метода редукции размерности, описанного в [3,4], в котором как трехмерный эластомер, так и двумерная шероховатая поверхность заменяются одномерными линиями. При этом используется преобразование спектральной плотности двумерной поверхности в спектральную плотность одномерной линии, сохраняющее инвариантными среднеквадратичные значения высоты, градиента и кривизны поверхности, а также их распределения [4]. В дальнейшем мы исследуем трение в одномерной модели; результаты этого исследования, однако, применимы в равной мере к исходной трехмерной системе.

Исследуемая модель состоит из фрактальной „шероховатой линии“ (рис. 1), генерируемой согласно

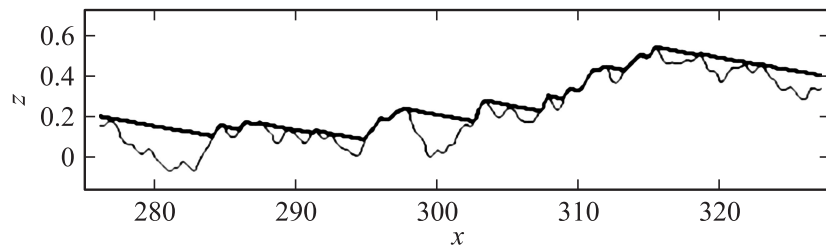
$$z(x) = Z_0 \int_{q_1}^{q_2} dq c(q) \cos(qx + \xi), \quad (4)$$

где  $c(q) = q^{-\beta}$ , есть спектральная плотность одномерной „шероховатой линии“,  $\beta = H + 1/2$ ,  $H$  — параметр Херста,  $q_1$  и  $q_2$  есть



**Рис. 1.** Одномерная модель, используемая в рамках „метода редукции размерности“ для моделирования контакта между эластомером и шероховатой поверхностью.

характерные волновые вектора „обрезания“ спектральной плотности, а  $\xi(x)$  есть случайная фаза, которая предполагается  $\delta$ -коррелированной:  $\langle \xi(q)\xi(q') \rangle = 2\pi\delta(q - q')$ . Для ускорения счета новые участки твердой поверхности генерируются по мере движения области контакта с эластомером с помощью алгоритма, описанного в [5]. Эластомер моделируется как набор дискретных элементов, соединенных с жесткой прямой линией элементами с комплексным коэффициентом жесткости  $\hat{k} = 4\hat{G}(\omega) = 4i\eta\omega\Delta x$ , где  $\Delta x$  — шаг дискретизации одномерной системы. Таким комплексным коэффициентом жесткости обладают демпферы с силой, пропорциональной скорости:  $F(x_i) = [4\eta\Delta x]\dot{z}(x_i)$ . Это правило расчета сил гарантирует эквивалентность контактных свойств одномерной модели и реального трехмерного эластомера [3]. Расчет движения системы производится согласно следующему алгоритму. Система иницируется путем приведения твердой поверхности и эластомера в первоначальный контакт. Начиная с этого момента к эластомеру прикладывается вертикальная сила  $F_N$ , а твердое контртело принудительно передвигается в отрицательном направлении оси  $x$  со скоростью  $v$ . На каждом шагу проверяется выполнение условий контакта: элементы эластомера, находившиеся в контакте с твердой поверхностью, остаются с ней в контакте до тех пор, пока сила взаимодействия не станет отрицательной (поскольку мы рассматриваем контакт без адгезии, отрицательные контактные силы не допускаются; с этого момента контакт между эластомером и

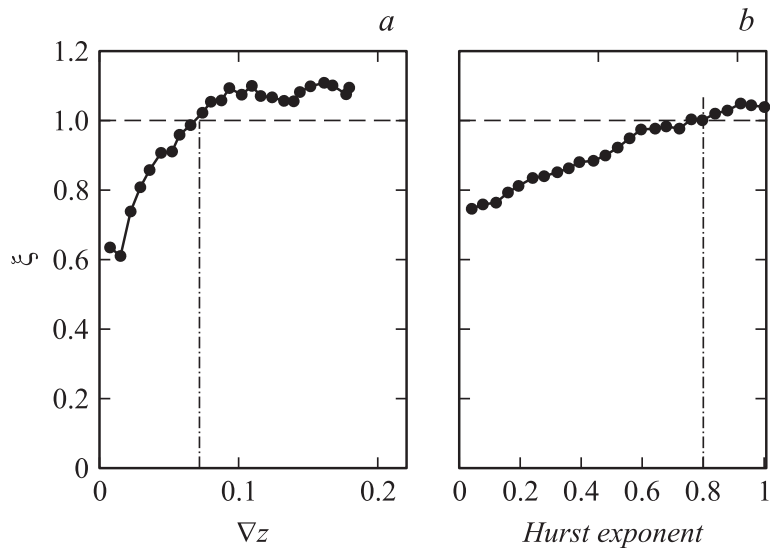


**Рис. 2.** „Моментальный снимок“ конфигурации твердой шероховатой поверхности и эластомера (сплошная жирная линия).

твердой поверхностью теряется). Напротив, элементы, которые не находились в контакте, считаются пришедшими в контакт с момента, когда разность между положением элемента эластомера и твердой поверхностью оказывается нулевым или отрицательным (в последнем случае элемент передвигается на поверхности и эта разность тем самым обращается в нуль). На каждом временном шаге контролируется нормальная сила и при необходимости изменяется путем передвижения эластомера как целого в вертикальном направлении. Для определения тангенциальной силы нормальная сила в каждом элементе умножается на тангенс угла наклона поверхности в данной точке.

Указанная процедура ведет к возникновению формы поверхности, показанной в один из моментов времени на рис. 2. Ее происхождение легко понять из простых физических соображений: поскольку рассматриваемая среда состоит из „чистых демпферов“, то ее элементы „вдавливаются“ твердым контртелом, однако не релаксируют назад (за исключением медленной релаксации, связанной с медленным движением вниз всего тела как целого). Тем самым эластомер давит на все выступы поверхности только с одной стороны, с чем и связано возникновение силы трения.

Согласно уравнению (2), отношение коэффициента трения к средне-квадратичному градиенту поверхностного профиля  $\xi = \mu/\nabla z$  не должно зависеть ни от нормальной силы, ни от шероховатости поверхности, ни от характерного волнового вектора, а поэтому, согласно нашей гипотезе, не зависит от фрактальной размерности поверхности. На



**Рис. 3.** Коэффициент  $\xi = \mu/\nabla z$  как функция среднеквадратичного значения  $\nabla z$  градиента поверхностного профиля (a) и параметра Херста (b).

рис. 3 представлено это отношение для поверхностей с различными свойствами и при различных значениях шероховатости и фрактальной размерности поверхности. При заданном значении силы и увеличении градиента шероховатости параметр  $\xi$ , как и ожидалось, стремится к постоянному значению (рис. 3, a). Это предельное значение только слабо зависит от фрактальной размерности поверхности (рис. 3, b). При значении параметра Херста 0.8, соответствующем фрактальной размерности поверхности  $D_f = 2.2$ , близкой к размерности многих „естественных поверхностей“, параметр  $\xi$  практически точно равен единице.

Таким образом, численные расчеты подтверждают справедливость аналитической оценки (2). При этом эмпирическое значение коэффициента  $\xi$  оказывается приблизительно равным единице.

Один из авторов (А.Э. Филиппов) благодарит Deutsche Forschungsgemeinschaft за финансовую поддержку во время его пребывания в Берлинском техническом университете.

## Список литературы

- [1] *Grosch K.A.* // Proc. Royal Society of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1963. V. 274. N 1356. P. 21–39.
- [2] *Grosch K.A.* // Rubber Chemistry and Technology. 1996. V. 69. P. 495–568.
- [3] *Popov V.L.* Contact Mechanics and friction. Physical principles and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2010. 362 p.
- [4] *Geike T., Popov V.L.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. P. 036710 (5 p).
- [5] *Filippov A.E., Popov V.L.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. P.027103 (4 p.).