12

Сглаживание и дифференцирование экспериментально измеренного распределения магнитного поля в зазоре электромагнита циклотрона

© С.Е. Кучер, Н.К. Абросимов, С.И. Воробьев, Г.А. Рябов

Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова РАН, Ленинградская область, Гатчина
E-mail: svetlada2@rambler.ru, vsiloa@pnpi.spb.ru

В окончательной редакции 24 ноября 2009 г.

Описан алгоритм для сглаживания и дифференцирования экспериментально измеренного распределения магнитного поля, заданного в цилиндрической системе координат в виде таблицы. Приведены формулы локального сглаживания и дифференцирования значений индукции магнитного поля по массивам различной размерности ($3 \times 3 \times 3$, $5 \times 5 \times 5$ и др.), при этом компоненты магнитного поля удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Приведены соображения по оптимальному выбору шага сглаживания и оценка точности и достоверности процесса.

Одной из наиболее трудоемких и важных задач при создании изохронного циклотрона является формирование заданного распределения магнитного поля в зазоре электромагнитного циклотрона. В процессе формирования магнитного поля обычно проводятся многократные измерения карты распределения магнитного поля в цилиндрической системе координат. Если магнитное поле обладает медианной плоскостью, совпадающей со средней плоскостью зазора, то достаточно измерить только аксиальную (вертикальную) компоненту магнитного поля B_z в средней плоскости зазора. Остальные, радиальная и азимутальная компоненты поля вблизи средней плоскости зазора, могут быть определены через производные от функции $B_z(r, \varphi)$ по r и φ. Однако, как известно, численное дифференцирование экспериментально измеренных функций, заданных в табличном виде, из-за погрешности измерений может приводить к недопустимо большим ошибкам. Существует несколько процедур „сглаживания“, т. е. коррекции экспериментально измеренных

Таблица 1. Величины $[x^u y^v]$, вычисленные для четырех типов ячеек (3×3, 3×5, 5×3, 5×5)

	$N_1 = 1$, $N_2 = 1$	$N_1 = 1$, $N_2 = 2$	$N_1 = 2$, $N_2 = 1$	$N_1 = 2$, $N_2 = 2$
$(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)$	9	15	15	25
$[x^2]$	$6h^2$	$10h^2$	$30h^2$	$50h^2$
$[y^2]$	$6d^2$	$30d^2$	$10d^2$	$50d^2$
$[x^2y^2]$	$4h^2d^2$	$20h^2d^2$	$20h^2d^2$	$100h^2d^2$
$[x^4]$	$6h^4$	$10h^4$	$102h^4$	$170h^4$
$[y^4]$	$6d^4$	$102d^4$	$10d^4$	$170d^4$

Таблица 2. Коэффициенты аппроксимирующего полинома для ячеек 3×3 и 3×5

	$N_1 = 1, N_2 = 1$	$N_1 = 1, N_2 = 2$
B_0	$\frac{5}{9}[B] - \frac{1}{3h^2}[Bp^2] - \frac{1}{3d^2}[Bq^2]$	$\frac{31}{105}[B] - \frac{1}{5h^2}[Bx^2] - \frac{1}{21d^2}[By^2]$
A_1	$\frac{1}{6h}[Bp]$	$\frac{1}{10h^2}[Bx]$
A_2	$\frac{1}{6d}[Bq]$	$\frac{1}{30d^2}[By]$
C_1	$\frac{1}{h^2}[Bp^2] - \frac{2}{3h^2}[B]$	$\frac{3}{5h^4}[Bx^2] - \frac{2}{5h^2}[B]$
C_2	$\frac{1}{4hd}[Bpq]$	$\frac{1}{20h^2d^2}[Bxy]$
C_3	$\frac{1}{d^2}[Bq^2] - \frac{2}{3d^2}[B]$	$\frac{1}{21d^4}[By^2] - \frac{2}{21d^2}[B]$

функций, после применения которых уже возможно использование методов численного дифференцирования „гладких“ функций. Эти процедуры можно разделить на две категории: локальное сглаживание, с использованием только близлежащих соседних точек, и сглаживание в целом [1], когда для сглаживания используются все точки измерения на всем промежутке изменения аргумента.

При сглаживании двухмерных массивов значений индукции магнитного поля циклотрона, измеренных в цилиндрической системе координат, часто используется сглаживание по азимутальной координате

Таблица 3. Коэффициенты аппроксимирующего полинома для ячеек 5×3 и 5×5

	$N_1 = 2, N_2 = 1$	$N_1 = 2, N_2 = 2$
B_0	$\frac{31}{105}[B] - \frac{1}{21h^2}[Bx^2] - \frac{1}{5d^2}[By^2]$	$\frac{27}{175}[B] - \frac{1}{35h^2}[Bx^2] - \frac{1}{35d^2}[By^2]$
A_1	$\frac{1}{30h^2}[Bx]$	$\frac{1}{50h^2}[Bx]$
A_2	$\frac{1}{10d^2}[By]$	$\frac{1}{50d^2}[By]$
C_1	$\frac{1}{21h^4}[Bx^2] - \frac{2}{21h^2}[B]$	$\frac{1}{35h^4}[Bx^2] - \frac{2}{35h^2}[B]$
C_2	$\frac{1}{20h^2d^2}[Bxy]$	$\frac{1}{100h^2d^2}[Bxy]$
C_3	$\frac{3}{5d^4}[By^2] - \frac{2}{5d^2}[B]$	$\frac{1}{35d^4}[By^2] - \frac{2}{35d^2}[B]$

за счет разложения экспериментально измеренного распределения в ряд Фурье. При этом высокие гармоники, связанные со случайными ошибками, отбрасываются. Недостатками указанного метода являются два обстоятельства. Во-первых, не ясно, начиная с какого номера гармоники необходимо обрезать полученный ряд Фурье, а во-вторых, полученное таким искусственным путем распределение поля может не удовлетворять уравнениям Максвелла, что не может не сказаться на точности вычисления производных.

В работе [2] описаны методы локального сглаживания и дифференцирования экспериментально измеренной функции двух или трех переменных, заданной в виде таблицы значений функции в узлах прямоугольной сетки с постоянным шагом. Наряду с общим случаем, когда на обрабатываемую функцию не наложены никакие дополнительные условия, рассмотрены также два частных случая, когда обрабатываемая скалярная функция $f(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа или когда обрабатываемая векторная функция $\mathbf{F}(x, y, z)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла.

В данной работе описан алгоритм локального сглаживания массива значений индукции магнитного поля, измеренного в цилиндрической системе координат, когда для уточнения значения индукции магнитного поля в заданной точке по методу наименьших квадратов (МНК) используются данные измерений в соседних точках. При этом коэффициенты аппроксимирующих полиномов подбираются так, чтобы автоматически выполнялись уравнения Максвелла. Предполагается, что распределение магнитного поля в зазоре электромагнита обладает медианной плоскостью $z = 0$, в которой компоненты $B_r = 0$ и $B_\varphi = 0$. Функции $B_r(r, \varphi, z)$ и $B_\varphi(r, \phi, z)$ вблизи медианной плоскости считаются нечетными функциями z, а функция $B_z(r, \varphi, z)$ — четной функцией z.

Компоненты вектора индукции магнитного поля вблизи точки с координатами $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $z = 0$ могут быть представлены в виде ряда Тейлора по степеням $x = r - r_0$, $y = r_0(\varphi - \varphi_0)$ и z:

$$B_r(r, \varphi, z) = A_1 z + C_1 xz + C_2 yz,$$

$$B_\varphi(r, \varphi, z) = A_2 z + \left(C_2 - \frac{A_2}{r_0}\right) xz + C_3 yz, \tag{1}$$

$$B_z(r, \varphi, z) = B_0 + A_1 x + A_2 y + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 xy + \frac{1}{2} C_3 y^2 + \frac{1}{2} C_4 z^2.$$

Значение вектора индукции магнитного поля B_0 и пять неизвестных коэффициентов A_1, A_2, C_1, C_2 и C_3, входящих в это выражение, могут быть найдены с использованием МНК. Пусть измеренные значения величины вертикальной составляющей магнитного поля в плоскости $z = 0$ представляют собою двухмерный массив значений, измеренных в узлах координатной сетки полярной системы координат с равномерным шагом по радиусу h и по углу δ. Возьмем некоторую точку с координатами $r = r_i$, $\varphi = \varphi_j$, $z = 0$, в которой значение индукции магнитного поля есть $\mathbf{B}_{ij}$. Выделим вокруг этой точки координатную ячейку, ограниченную линиями координатной сетки (рис. 1, a):

$$r = r_i - N_1 h, r = r_i + N_1 h, \varphi = \varphi_j - N_2 \delta \text{ и } \varphi = \varphi_j + N_2 \delta,$$

где N_1 и N_2 — целые числа, принимающие значения $1, 2, 3 \ldots$. Общее число узлов в полученной таким образом ячейке равно $(2N_1 + 1)(2N_2 + 1)$. Внутри выбранной ячейки координаты произвольной точки определяются выражениями (рис. 1, b):

$$x = r - r_i, \qquad \Delta\varphi = \varphi - \varphi_j.$$

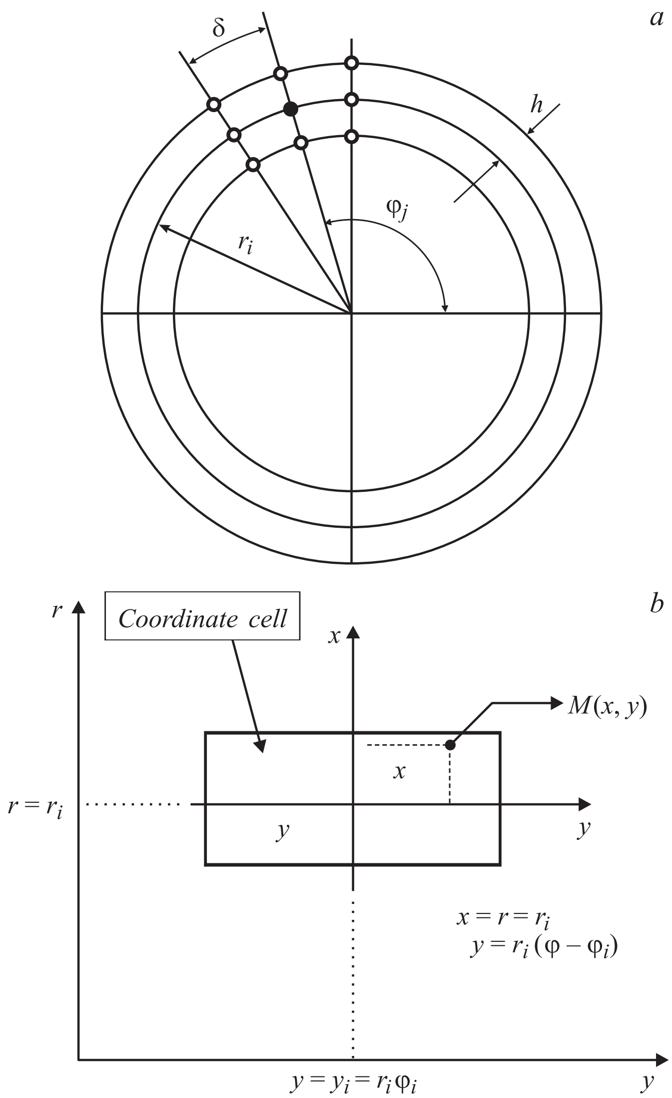

Рис. 1. *a* — координатная сетка; *b* — координатная ячейка, ограниченная линиями координатной сетки.

Координаты узлов относительно центральной точки определяются выражениями:

$$x_p = r - r_i = ph, \qquad \Delta\varphi_q = \varphi - \varphi_j = q\delta,$$

где p и q — целые числа, пробегающие значения:

$$p = -N_{1,} - (N_1 - 1), \quad 0, \quad N_1 - 1, N_1.$$

$$q = -N_{2,} - (N_2 - 1), \quad 0, \quad N_2 - 1, N_2.$$

Коэффициенты аппроксимирующего полинома B_0, A_1, A_2, C_1, C_2 и C_3 находятся из условия минимума функционала

$$\Phi = \sum_{p=-N_1}^{N_1} \sum_{q=-N_2}^{N_2} \left(B_0 + A_1 x + A_2 y + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 xy + \frac{1}{2} C_3 y^2 - B_{pq} \right)^2. \tag{2}$$

Здесь обозначено $y = (\varphi - \varphi_j) r_i$.

Результаты расчета сведены в табл. 1–3, где обозначено

$$[x^u y^v] = h^u d^v \sum_{p=-N_1}^{N_1} p^u \sum_{q=-N_2}^{N_2} q^v, \tag{3}$$

$$[B x^u y^v] = h^u d^v \sum_{p=-N_1}^{N_1} p^u \sum_{q=-N_2}^{N_2} B_{pq} q^v, \tag{4}$$

где $d = \delta r_i$.

Переходя, таким образом, от точки к точке, можно преобразовать массив значений индукции магнитного поля $(B_z)_{ij}$, измеренных в узловых точках с координатами $r = r_i$, $\varphi = \varphi_j$, $z = 0$, в массив сглаженных значений $(B_0)_{ij}$, а также создавать два массива значений производных $\left(\frac{\partial B_z}{\partial r}\right)_{ij}$ и $\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi}\right)_{ij}$, необходимых в дальнейшем для расчета осевых траекторий и частот бетатронных колебаний.

Полученные формулы могут быть использованы для двухмерной интерполяции внутри ячейки с центральной точкой (i, j). Для этого необходимо при осуществлении процедуры сглаживания и дифференцирования создать массив коэффициентов $(B_0)_{ij}$, $(A_1)_{ij}$, $(A_2)_{ij}$, $(C_1)_{ij}$, $(C_2)_{ij}$ и $(C)_{ij}$.

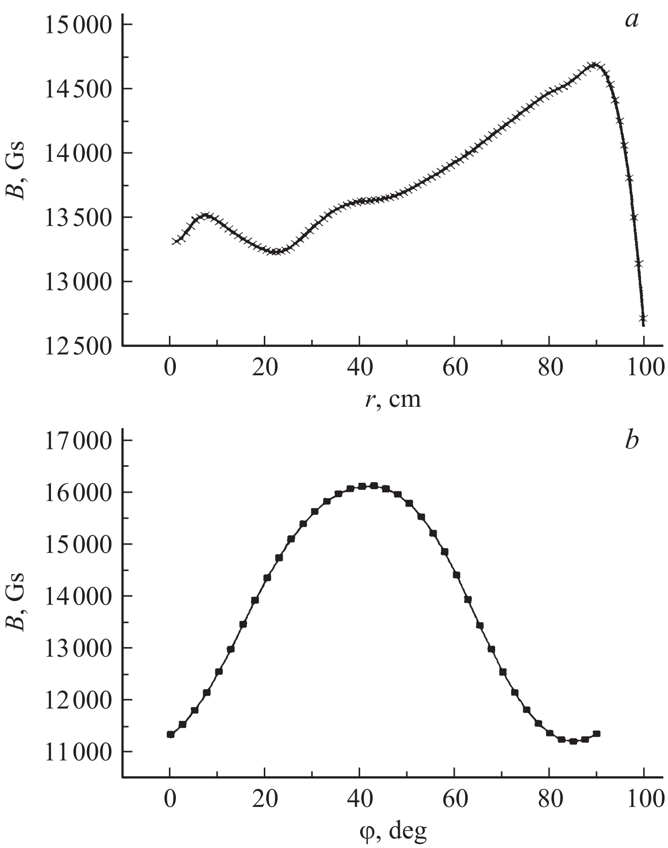

Рис. 2. Распределение: *a* — среднего измеренного и сглаженного магнитных полей по радиусу: *b* — измеренного и сглаженного магнитных полей по азимуту ($R = 51$ cm).

Сглаживание является эффективным методом устранения влияния случайных ошибок. Однако, как и всякий метод сглаживания, его надо применять в достаточной мере осторожно, поскольку при этом можно исказить поведение функции. В работе [2] используются методы теории регрессии для оценки точности процесса сглаживания и его достоверности. Показано, что для оптимального выбора шага

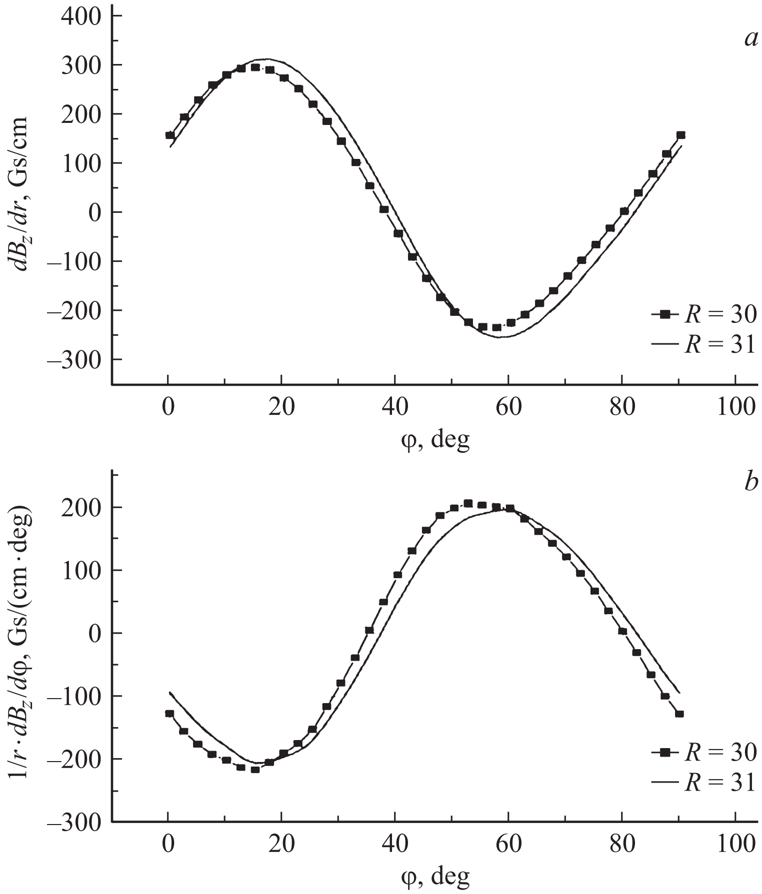

Рис. 3. Зависимость производной индукции магнитного поля: *a* — по радиусу от угла ($R = 30$ cm и $R = 31$ cm); *b* — по азимуту от угла ($R = 30$ cm и $R = 31$ cm).

сглаживания необходимо, чтобы дисперсия D, характеризующая разброс экспериментальных точек относительно сглаженной поверхности, была равна средневзвешенной дисперсии многократных дублирующих измерений в одной точке S^2. При $D > S^2$ и при $D < S^2$ существует опасность исказить истинную зависимость индукции магнитного поля от координат.

В качестве иллюстраций метода приводятся результаты обработки данных, полученных в результате измерений магнитного поля в зазоре электромагнита гатчинского изохронного циклотрона (ГИЦ) на 80 MeV:

1. Распределение среднего измеренного и сглаженного магнитных полей по радиусу (рис. 2, a). На рисунке измеренное магнитное поле представлено сплошной линией, а сглаженное магнитное поле изображено точками. Отличие измеренных и сглаженных значений индукции магнитного поля составляет менее 0.001%.

2. Распределение измеренного и сглаженного магнитных полей по азимуту на одном элементе периодичности на некотором радиусе (рис. 2, b). На рисунке измеренное магнитное поле представлено сплошной линией, а сглаженное магнитное поле изображено точками. Отличие измеренных и сглаженных значений индукции магнитного поля составляет менее 0.02%.

3. Производные индукции магнитного поля по радиусу и по азимуту для разных радиусов (рис. 3, a и b). На рисунках производные индукции магнитного поля, вычисленные для радиуса $R = 30$ cm, изображены точками, а производные индукции магнитного поля, вычисленные для радиуса $R = 31$ cm, представлены сплошной линией.

Список литературы

[1] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука. 1978. С. 58, 474.
[2] *Абросимов Н.К., Рябов Г.А., Сандлер Б.З.* Сглаживание и дифференцирование экспериментально измеренной функции нескольких переменных. Препринт ПИЯФ-595. Гатчина, 1980. 22 с.