03

Конвективные когерентные структуры в ячейке Хеле–Шоу

© К.А. Гаврилов, В.А. Демин, Г.Ф. Путин

Пермский государственный университет
E-mail: demin@psu.ru

Поступило в Редакцию 5 октября 2009 г.

Представлены результаты теоретического и экспериментального исследования конвективных процессов, связанных с хаотизацией течений в ячейке Хеле–Шоу. На примере полостей с разным соотношением сторон широких граней изучены свойства различных модификаций специфического „пульсационного режима", определенные характеристики которого с ростом числа Рэлея становятся хаотическими, в то время как течение продолжает обладать свойством статистической повторяемости и во многом имеет регулярный характер. Выявлена аналогия, позволяющая рассматривать пульсирующие вихри в рассматриваемом течении как простейшие двумерные когерентные струкутры, имеющие конвективную природу.

Многочисленные наблюдения показывают, что с ростом управляющего параметра, роль которого в тепловой конвекции чаще всего играет число Рэлея, происходит постепенное усложнение структуры течения. При каком-то значении параметра конвекция становится нестационарной, и в конечном счете всегда наступает момент хаотизации течения. В горизонтальном слое кубической или шаровой полости стохастические движения при больших значениях надкритичности, как правило, имеют трехмерную структуру. Несмотря на впечатляющие успехи в компьютерном моделировании, полноценное теоретическое исследование трехмерных хаотических режимов пока затруднено, как не решена окончательно и проблема перехода к турбулентности. В вертикальной ячейке Хеле–Шоу при подогреве снизу в широком диапазоне чисел Рэлея конвекция может считаться двумерной, даже если в плоскости широких граней имеют место нерегулярные течения [1]. Широко известное четерехвихревое течение с нерегулярным перезамыканием угловых вихрей [2] или стохастический „пульсационный режим" [1] являются примерами подобных движений.

В плоскости широких граней эти течения могут быть нерегулярными, однако в поперечном сечении профили температуры и скорости отвечают ламинарному „пуазейлевому“ профилю до тех пор, пока остается справедливым приближение плоских траекторий. Сценарий и анализ причин хаотизации упомянутых выше колебательных течений в ячейке Хеле–Шоу ранее не рассматривались. Сделаем это на примере пульсационного режима, который, как оказалось, может наблюдаться в широком диапазоне управляющих параметров в полостях с разным соотношением сторон.

В экспериментах рабочая полость ограничивалась с боков плексигласовыми пластинами, а сверху и снизу медными теплообменниками. Геометрические параметры конвективной ячейки (высота h, длина l и ширина $2d$) варьировались и могли принимать значения: $2d = 1{-}4$ mm, $l = 1.5{-}130$ mm, $h = 20{-}80$ mm. Наиболее интересные результаты, касающиеся нестационарных регулярных и нерегулярных пульсационных течений, были получены для соотношения сторон $2:20:40$ и $2.4:130:80$. Ячейка Хеле–Шоу подогревалась снизу так, чтобы на ее границах создавалось линейное по высоте распределение температуры. Прозрачные вертикальные пластины из органического стекла позволяли визуально наблюдать за течением. Интенсивность течения фиксировалась дифференциальными термопарами. В качестве рабочих жидкостей использовались вода и трансформаторное масло ТМ-1.

При проведении расчетов система координат выбиралась так, чтобы ось y была направлена вдоль вертикали, а ось z — перпендикулярно широким граням. В этой системе координат γ $(0,1,0)$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх. Для описания конвективных течений воспользуемся стандартными уравнениями для несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta\mathbf{v} + \mathrm{Ra}\,T\gamma, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad (\mathbf{v}|_\Gamma = 0), \tag{1}$$

$$\mathrm{Pr}\,\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = \Delta T, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}\Big|_\Gamma = 0\right), \tag{2}$$

где $\mathbf{v}$, T, p — безразмерные поля скорости, температуры и давления. Система уравнений (1), (2) содержит безразмерные параметры — числа

Рэлея и Прандтля:

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta\Theta d^3}{\nu\chi}, \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi}, \tag{3}$$

где ν, χ, β — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения, Θ — характерная разность температура; g — величина ускорения свободного падения. Дополняют набор параметров безразмерные высота полости H и длина L. Полость имеет твердые границы, поэтому в расчетах для скорости используется условие прилипания. Вертикальные грани ячейки считаются теплоизолированными, в результате нормальная компонента теплового потока на них равна нулю.

В соответствии с приближением Хеле–Шоу будем предполагать, что геометрические параметры задачи удовлетворяют требованию $H, L \gg 1$. Ограничение на толщину ячейки позволяет использовать приближение плоских траекторий, согласно которому в жидкости возможны конвективные движения только в плоскости широких граней $\mathbf{v}(v_x, v_y, 0)$. Специфическая постановка позволяет свести трехмерную задачу к плоской, поэтому численное решение уравнений тепловой конвекции (1), (2) выполняется на основе уравнений, записанных в терминах функции тока $v_x = -\partial\Psi/\partial y$, $v_y = \partial\Psi/\partial x$ и температуры. Зависимость функции тока Ψ от координаты z моделируется тригонометрической функцией $\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, t)\cos(\pi z/2)$.

Выделим из поля температуры равновесную часть $T = T_0 + \theta(x, y)$, где профиль температуры T_0 линейно зависит от вертикальной координаты и соответствует равновесному подогреву снизу $T_0 = -y$. После применения в поперечном сечении полости галеркинской процедуры система уравнений тепловой конвекции в терминах ψ и θ решалась численно методом конечных разностей. В ходе расчетов использовался двухполевой метод в сочетании с неявной схемой по времени. Уравнение Пуассона для функции тока решалось с помощью метода последовательной верхней релаксации. При аппроксимации производных по времени и производных по координатам использовались соответственно односторонние и центральные разности. Чтобы реализовать „пульсационный режим“, расчеты в соответствии с экспериментальными параметрами производились для полости с соотношением сторон $2:40:20$ и количеством узлов в плоскости широких граней 100×50. Компьютерный модуль был написан на языке программирования Fortran-90.

Расчеты показывают, что ниже критического числа Рэлея жидкость находится в состоянии механического равновесия. Линейный анализ устойчивости позволяет определить пороговое число Рэлея $\mathrm{Ra}_1 = 0.34$. Критические возмущения имеют двухвихревую структуру, в результате при превышении порогового значения числа Рэлея равновесие сменяется соответствующим конвективным течением. В случае дальнейшего увеличения числа Рэлея в системе могут наблюдаться различные стационарные режимы трех-, четырех-, пяти- и шестивихревой структуры. Одному значению числа Рэлея может соответствовать несколько решений. В зависимости от начальных условий реализуется одно из них.

При достижении $\mathrm{Ra}_2 = 4.3$ в ячейке возникает автоколебательное течение, экспериментальная фотография и поле функции тока которого приведены на рис. 1. На фоне четырехвихревого течения в правом и левом нижних углах ячейки зарождаются небольшие вихри, которые сначала начинают увеличиваться в размерах, а затем практически целиком поглощаются основным течением. Вследствие неполного поглощения через некоторое время в углах снова возникают вихри с тем же направлением вращения. Вихри, последовательно рождающиеся один за другим в углу полости, имеют приблизительно одинаковые моменты импульса, однако по мере роста надкритичности отличие одного вихря от другого становится все более заметным. Подобное поведение создает характерные пульсации в течении, в результате чего оно и получило соответствующее название.

Усложнение колебаний происходит по следующему сценарию: вдоль границы зародившихся в углах ячейки вихрей распространяется сдвиговая волна, в определенном смысле напоминающая развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Скорость малого углового вихря больше скорости „огибающего“ течения, поэтому вдоль линии, разделяющей вихри, возникает специфический перепад скоростей, а именно, локальный профиль осредненной скорости течения вблизи границы вихря содержит точку перегиба. Для невязкого течения с точной перегиба в профиле скорости в рамках линейной теории [3] можно оценить длину волны возмущений с наибольшей скоростью роста. Используя результаты численного расчета, для $\mathrm{Ra} = 10$ получаем $\lambda_1 = 14.1 \cdot L_s \approx 17$, где $L_s = v/v'$ — характерная сдвиговая длина [3]. Скорость распространения возмущений, формирующих сдвиговую волну, можно оценить, напрямую отслеживая в расчетах динамику течения. Из численных данных следует, что длина волны в безразмерных единицах должна быть равна $\lambda_2 = c\tau/\mathrm{Pr} \approx 17$ (c — скорость сдвиговой волны, τ — период),

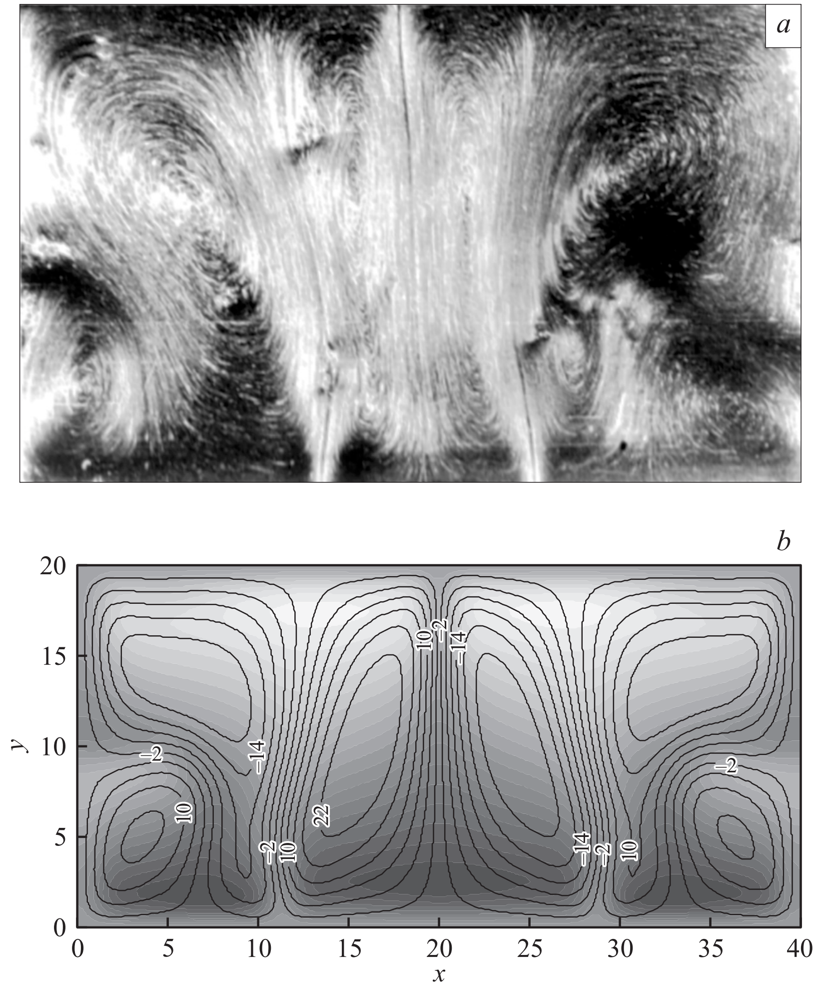

Рис. 1. Конвективные структуры при автоколебательном пульсационном режиме; *a* — эксперимент (для визуализации течения использовалась алюминиевая пудра); *b* — изолинии функции тока и распределение температуры. Результаты численного моделирования представлены для Ra = 10, Pr = 30, $L = 40$, $H = 20$. Менее нагретой жидкости соответствуют темные, более нагретой — светлые области.

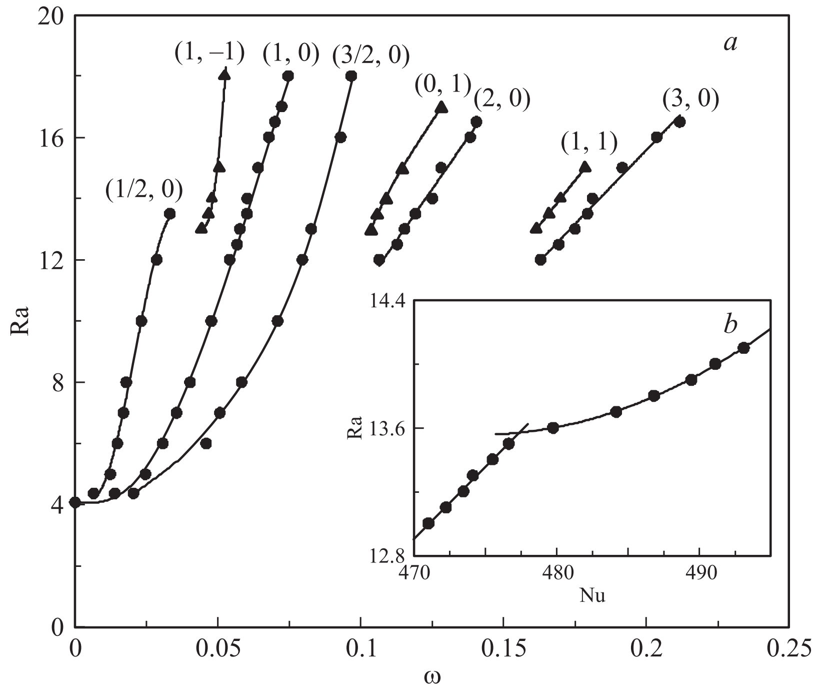

Рис. 2. Значения частот спектральных пиков (a) и число Нуссельта (b) в зависимости от числа Рэлея при переходе к хаотическим колебаниям. Индексы m_1, m_2 соответствуют вкладам двух несоизмеримых частот в суперпозиционную моду $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ (a); излом на фрагменте (b) иллюстрирует момент появления сплошных участков в спектре частот при $\mathrm{Ra}_4 = 13.6$.

что неплохо согласуется с предыдущей оценкой, полученной другим способом. Наконец, характерную величину длины волны можно оценить визуально, наблюдая в расчетах за эволюцией течения. Получается чуть меньшее значение, однако все эти рассуждения приводят к выводу, что наблюдаемые колебания границы раздела углового вихря и „огибающего“ течения имеют сдвиговую природу.

С ростом управляющего параметра в спектре Фурье исследуемого автоколебательного течения увеличивается интенсивность мод с частотами $m_1\omega_1$, кратными основной частоте пульсаций ω_1, где $m_1 = n/2$, n — целое число. При достижении $\mathrm{Ra}_3 \approx 13$ в спектре возникает новая частота ω_2, несоизмеримая с частотой ω_1, которая приводит к появлению суперпозиционных мод вида $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. На рис. 2, *a* изображена зависимость частот мод, вносящих основной вклад в спектр течения, от числа Рэлея. Каждой моде с частотой ω ставится в соответствие пара коэффициентов (m_1, m_2), с ростом надкритичности для любых m_1 и m_2 частоты колебаний увеличиваются. Вблизи точки возникновения автоколебаний при $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_2$ зависимость основной частоты ω_1 от числа Рэлея удовлетворяет корневому закону. Течение перестает быть периодическим при достижении числом Рэлея значения $\mathrm{Ra}_4 = 13.6$. При больших значениях надкритичности ширина спектральных пиков становится сравнимой с расстоянием между пиками, а траектории в фазовом пространстве стремительно расходятся, заполняя ограниченный объем. Порог перехода от ламинарного режима к турбулентному можно фиксировать, анализируя зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея (вычислялось безразмерное значение теплопотока через нижнюю границу полости). На рис. 2, *b* приведен график зависимости, содержащий излом при Ra_4: возникновение сплошных участков в спектре приводит к смене закона теплопередачи. Отметим, что в рассматриваемой системе удается наблюдать периодические течения для чисел Рэлея, превышающих Ra_4. Такое поведение указывает на наличие перемежаемости при хаотизации течения. С ростом надкритичности при переходе к турбулентному течению „пульсирующие вихри“ теряют свою правильную форму в пространстве и периодичность во времени. Эти вихри обладают определенным моментом, характеризуются свойством статистической повторяемости и выполняют определенную функцию — обеспечивают интенсивный конвективный теплоперенос. В результате их можно рассматривать как простейшие двумерные когерентные структуры, имеющие конвективную природу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код р_Урал_а № 07-08-96035).

Список литературы

[1] *Бабушкин И.А., Демин В.А.* // ПМТФ. 2006. № 2. С. 40–48.
[2] *Путин Г.Ф., Ткачева Е.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 1. С. 3–8.
[3] *Michalke A.* // J. Fluid Mech. 1964. V. 19. P. 543–556.