01;03

Эволюция вихря Рэнкина в газе с источником тепловыделения

© И.П. Завершинский, А.И. Климов, Н.Е. Молевич, Д.П. Порфирьев

Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН
E-mail: molevich@fian.smr.ru
Самарский государственный аэрокосмический университет
Объединенный институт высоких температур РАН, Москва

Поступило в Редакцию 22 октября 2008 г.

Исследовано влияние источника тепловыделения, мощность которого зависит от температуры, на устойчивость вихря Рэнкина. Найдено условие образования радиально-сходящегося закрученного потока с растущей степенью завихренности в среде с положительной обратной связью между возмущениями неравновесного тепловыделения и давления в ядре вихря.

PACS: 47.32.cd

Вихрь Рэнкина является широко используемой моделью цилиндрического вихря с конечным ядром круглого сечения радиуса R, в котором завихренность постоянна [1]. Вне ядра течение полагается безвихревым. В этой модели среда предполагается несжимаемой, радиальная v_r и осевая v_z скорости вихря равны нулю, а тангенциальная скорость имеет следующий вид:

$$v_t = \begin{cases} \omega_0 r, & r \leqslant R, \\ \dfrac{\omega_0 R^2}{r}, & r > R, \end{cases} \tag{1}$$

где ω_0 — угловая скорость вихря (соответствующая завихренность равна $2\omega_0$). С учетом условия несжимаемости среды должно выполняться

$$v_t \ll c_s, \tag{2}$$

где c_s — скорость звука.

В настоящей работе показано, что подобный цилиндрический вихрь в среде с неравновесным тепловыделением, зависящим от температуры среды T, трансформируется в радиально сходящийся или расходящийся вихрь.

Запишем уравнения закрученного осесимметричного движения несжимаемого невязкого газа с источником тепловыделения $Q(T)$ в цилиндрической системе координат в виде

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_t^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_t}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_t}{\partial z} + \frac{v_t v_r}{r} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{5}$$

$$\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

$$C_V\left(\frac{\partial P}{\partial t} + v_r \frac{\partial P}{\partial r} + v_z \frac{\partial P}{\partial z}\right) = Q(T) - I(T). \tag{7}$$

Здесь $P = \rho T/m$ — давление газа, $\rho = \rho_0 = \text{const}$ — плотность газа, m — молекулярная масса, C_V — теплоемкость газа при постоянном объеме, Q, I — объемные мощности неравновесного тепловыделения и теплоотвода. В роли источника неравновесного тепловыделения могут выступать электроны в разряде, греющие газ за счет столкновений с его атомами и молекулами, экзотермические химические реакции, а также скрытая теплота, выделяющаяся при неравновесной конденсации (например, в грозовом облаке).

Решение системы (3)–(6) в виде вихря Рэнкина (1) существует только при $Q = I$. Из (3) следует, что в ядре вихря давление зависит от радиуса как

$$P = P_0 + \frac{\rho_0 \omega_0^2 r^2}{2}, \qquad P_0 = P(r = 0),$$

т. е. давление минимально в центре вихря. При этом с учетом (2) имеем

$$\frac{P - P_0}{P_0} \ll 1. \tag{8}$$

В общем случае величины Q и I зависят от температуры, и правая часть уравнения (7) будет отлична от нуля. В результате давление будет меняться со временем и поле скоростей также будет не стационарным, причем радиальная и осевая компонента теперь не могут быть нулевыми.

Далее рассмотрим случай, когда на границе ядра вихря теплоотвод компенсирует теплоподвод, т. е. выполняется

$$Q(R) = I(R) = Q_R.$$

С учетом (8) изменение давления в ядре вихря мало, поэтому правую часть (7) можно разложить в ряд Тейлора, ограничившись первым членом ряда

$$Q(T) - I(T) = (Q_{RT} - I_{RT}) \frac{Q_R}{P_R} (P - P_R),$$

где

$$Q_{RT} = \frac{T_R}{Q_R} \frac{dQ}{dT}\Big|_{T=T_R}, \quad I_{RT} = \frac{T_R}{Q_R} \frac{dI}{dT}\Big|_{T=T_R}, \quad T_R = T(r = R).$$

Будем искать решение системы (3)–(7) в виде $v_t = \omega(t) r$ в предположении

$$v_r, v_z \ll v_t. \tag{9}$$

Тогда, для величин первого порядка малости исходная система преобразуется к виду

$$\begin{gathered} \frac{\partial v_r}{\partial t} - \omega^2 r = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{2\omega v_r}{r} = 0, \\ C_V \left(\frac{\partial P}{\partial t} + v_r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = (Q_{RT} - I_{RT}) \frac{Q_R}{P_R} (P - P_R). \end{gathered} \tag{10}$$

Уравнение непрерывности (6) остается без изменения.

Аналогично работе [2], в которой рассматривалась проблема образования смерчей, радиальную компоненту скорости запишем в виде

$$v_r = -\frac{A}{2} r. \tag{11}$$

Тогда из системы уравнений (6), (10) следует

$$v_z = Az, \qquad \omega = \omega_0 e^{At}, \tag{12}$$

$$P = P_R + \frac{\rho_0 \omega_0^2 (r^2 - R^2)}{2} e^{2At}, \quad P_R = P(r = R), \tag{13}$$

$$A \approx \frac{Q_R(Q_{RT} - I_{RT})}{2P_R C_V}.$$

Учитывая условия (2), (9), решения (11)–(13) не могут быть распространены на достаточно большие расстояния r, z и времена t. Необходимо выполнение условий

$$|A| \ll \omega_0 e^{At}, \quad |A|z \ll \omega_0 r e^{At}, \quad \omega_0 r e^{At} \ll c_s, \quad \frac{r^2}{2R^2} \ll 1.$$

Согласно (13), давление на оси вихря будет уменьшаться при $A > 0$ или возрастать при $A < 0$. Физически это объясняется тем, что при $A > 0$, т.е. $Q_{RT} - I_{RT} > 0$, реализуются условия положительной обратной связи между изменением давления и тепловыделением в среде. Так как давление в центре вихря меньше, чем на границе ядра, то подобная положительная обратная связь приводит к увеличению разности давлений. И, наоборот, отрицательная обратная связь приводит к повышению давления в центре вихря.

Согласно виду полученных решений (11), (12), цилиндрический вихрь в тепловыделяющей среде может трансформироваться либо в „восходящий" радиально-сходящийся закрученный поток при $Q_{RT} - I_{RT} > 0$, либо в „нисходящий" радиально-расходящийся закрученный поток при $Q_{RT} - I_{RT} < 0$. В первом случае завихренность потока возрастает, во втором — уменьшается. Кавычки здесь применены, так как направление оси z в рассмотренной постановке задачи может быть любым, и не обязательно вертикальным. Полученные результаты представляют интерес с точки зрения устойчивости вихря как в лабораторных тепловыделяющих средах, так и в естественных условиях, например при наличии процессов неравновесной конденсации в атмосфере. О важной роли неравновесной конденсации в процессах образования смерча ранее сообщалось в [3,4].

Список литературы

[1] *Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 504 с.
[2] *Краснов Ю.К.* // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова, М.И. Рабиновича. М.: Наука, 1987. С. 174.
[3] *Писниченко И.А.* // Изв. РАН. Сер. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. С. 793–798.
[4] *Pashitskii E., Anchishkin D., Malnev V., Naryshkin R.* // J. Molecular liquids. 2005. V. 120. N 1–3. P. 79–82.