

01;03

Моделирование гравитационной конвекции суспензий

© Ю.А. Невский, А.Н. Осипцов

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва
E-mail: nevskii u@mail.ru

Поступило в Редакцию 9 октября 2008 г.

Предложена двухконтинуальная модель для описания гравитационной конвекции разреженной суспензии в широком диапазоне отношения плотностей фаз. Определены параметры подобия и рассмотрен предельный случай малоинерционных частиц, в котором постановки задач существенно упрощаются. Приведены примеры численных расчетов гравитационной конвекции при оседании тяжелых частиц в вязкой среде в наклонной двумерной прямоугольной области. Расчетами подтвержден известный экспериментальный эффект увеличения эффективной скорости оседания дисперсной примеси при отклонении стенок сосуда от направления силы тяжести.

PACS: 47.55.Kf, 47.55.P

При исследовании гравитационной конвекции в дисперсных средах значительный интерес вызывает моделирование вихревых течений в осаждающейся суспензии [1], поскольку формирование вихревых зон может приводить к заметному увеличению эффективной скорости осаждения дисперсной фазы [2]. В существующих моделях в межфазном обмене импульсом, как правило, учитывается лишь сила Стокса. Анализ известных точных решений задачи о движении сферы в вязкой среде при малых числах Рейнольдса показывает, что в случае, когда плотности частицы и среды близки, силы нестационарной природы формально становятся сравнимыми с силой Стокса [3,4]. В связи с этим представляется целесообразным построение общей модели гравитационной конвекции суспензий с учетом нестационарных эффектов в межфазном взаимодействии, определение параметров подобия и исследование возможных предельных вариантов модели, позволяющих описывать эффекты ускоренной седиментации суспензий в замкнутых

объемах в случае формирования крупномасштабных вихревых течений. Перечисленному кругу проблем и посвящена настоящая работа.

Для описания движения гетерогенной среды принят двухконтинуальный подход [5]. Предполагается, что смесь состоит из вязкой несжимаемой несущей фазы и дисперсных сферических частиц, имеющих радиус σ и массу m . Объемная концентрация частиц мала, их хаотическое движение отсутствует, поэтому дисперсная фаза моделируется континуумом, лишенным собственных напряжений. Считается, что частицы обтекаются в режиме сплошной среды при малых числах Рейнольдса. Для случая, когда пространственные масштабы изменения поля скорости несущей фазы много больше размера частицы, суммарная сила, действующая на частицу со стороны жидкости, представима в виде [6]:

$$\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_{St} + \mathbf{f}_A + \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_{BB},$$

$$\mathbf{f}_{St} = 6\pi\sigma\mu(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s), \quad \mathbf{f}_A = \rho\tau_s \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{g} \right), \quad \mathbf{f}_m = \frac{\rho\tau_s}{2} \left(\frac{d_s\mathbf{v}}{dt} - \frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt} \right),$$

$$\mathbf{f}_{BB} = 6\sigma^2\sqrt{\pi\rho\mu} \int_0^t \left(\frac{d_s\mathbf{v}}{dt_1} - \frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt_1} \right) \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}}.$$

Здесь d_s/dt обозначают субстанциональные производные вдоль траекторий твердой частицы; \mathbf{f}_{St} , \mathbf{f}_A , \mathbf{f}_m , \mathbf{f}_{BB} — силы Стокса, Архимеда, присоединенных масс и Бассе-Буссинеска; τ_s — объем частицы, ρ и μ — плотность и динамическая вязкость жидкости, \mathbf{v} и \mathbf{v}_s — векторы скоростей несущей фазы и частиц, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести, индекс s относится к параметрам частиц.

При описании гравитационной конвекции суспензии в качестве масштабов при обезразмеривании удобно взять линейный размер сосуда L , скорость стационарного оседания (в случае $\rho/\rho_s > 1$ — всплытия) частицы в вязкой среде $U = mg(1 - \eta)/6\pi\sigma\mu$ и характерное время $T = L/U$. Характерная длина скоростной релаксации фаз задается соотношением $l_\tau = mU/6\pi\sigma\mu$. После обезразмеривания система уравнений двухконтинуальной модели движения разреженной дисперсной смеси (в пренебрежении членами порядка объемной доли частиц) принимает

вид:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{d_s n_s}{dt} + n_s \operatorname{div}(\mathbf{v}_s) = 0, \quad \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = \mathbf{f}_s - \frac{\beta}{|1 - \eta|} \mathbf{j},$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \alpha n_s \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = -\nabla p + \frac{\Delta \mathbf{v}}{\operatorname{Re}} - \frac{\alpha \beta}{|1 - \eta|} n_s \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_s = \beta \left((\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) + \chi \int_0^t \left(\frac{d_s \mathbf{v}}{d\tau} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \right) + \frac{\eta}{2} \left(\frac{d_s \mathbf{v}}{dt} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} \right) + \eta \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\beta}{|1 - \eta|} \mathbf{j} \right).$$

Здесь \mathbf{j} — единичный вектор, направленный против силы тяжести, числовая концентрация частиц n_s отнесена к ее характерному значению n_{s0} , давление p (здесь и ниже под давлением понимается разность истинного и гидростатического давлений) отнесено к ρU^2 . Система (1) содержит четыре независимых безразмерных параметра: отношение истинных плотностей фаз $\eta = \rho/\rho_s$, отношение „размазанных“ плотностей фаз $\alpha = mn_{s0}/\rho$, параметр инерционности частиц $\beta = L/l_\tau$ и число Рейнольдса $\operatorname{Re} = \rho UL/\mu$. Параметр $\chi = (9\eta/2\pi\beta)^{1/2}$; при выводе системы (1) использовалось соотношение $U^2/gL = (1 - \eta)/\beta$. Ввиду малости объемной доли частиц параметр α , как правило, тоже мал.

Начальные и граничные условия (Ω — граница области) таковы:

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_s|_{t=0} = 0, \quad n_s|_{t=0} = n_s(x, y), \quad \mathbf{v}|_\Omega = 0. \quad (2)$$

Поскольку уравнения движения частиц — квазилинейные уравнения первого порядка, задания граничных условий для скорости дисперсной фазы не требуется (в представленных ниже расчетах частицы, достигшие стенок сосуда, считались исчезнувшими из потока).

Для практических приложений (гидроразрывные технологии, системы очистки, флотационные колонны и др.) типична ситуация, когда длина скоростной релаксации частиц много меньше размера сосуда, т. е. $\beta \gg 1$. Переходя в (1) к пределу $\beta \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha\beta/(1 - \eta) \sim O(1)$,

получаем упрощенную постановку:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\operatorname{Re}}\Delta\mathbf{v} - An_s\mathbf{j}, \quad (3)$$

$$\frac{dn_s}{dt} = 0, \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v} - \operatorname{Sgn}(1 - \eta)\mathbf{j}, \quad A = \frac{\alpha\beta}{|1 - \eta|}.$$

Здесь Sgn — знак величины в скобках. В зависимости от значений отношения плотностей фаз и вязкости несущей фазы характерные числа Рейнольдса Re могут быть велики (тогда в (3) можно пренебречь вязкими членами), конечны либо даже малы (этот случай реализуется в случае близких значений плотностей фаз и высоких вязкостей несущей фазы). В последнем случае ($\beta \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$, $\operatorname{Re} \rightarrow 0$, $\alpha\beta\operatorname{Re}/(1 - \eta) \sim O(1)$) упрощенная постановка принимает вид:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \nabla p_1 = \Delta\mathbf{v} - Bn_s\mathbf{j}, \quad p_1 = \operatorname{Re}p, \quad (4)$$

$$\frac{dn_s}{dt} = 0, \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v} - \operatorname{Sgn}(1 - \eta)\mathbf{j}, \quad B = \frac{\alpha\beta\operatorname{Re}}{|1 - \eta|}.$$

В предельных постановках граничные и начальные условия сохраняют вид (2). Заметим, что даже предельные постановки учитывают двухскоростные эффекты, что отличает построенную модель от стандартного приближения Буссинеска слабонеоднородной жидкости.

Для моделирования известного экспериментального эффекта ускорения седиментации частиц при отклонении сосуда от вертикали [2] были проведены численные расчеты развития гравитационной конвекции суспензии в наклонной двумерной квадратной камере. Для численных расчетов система (4) переписывалась через функции тока и вихря ($\psi - \omega$), использовалась разностная схема первого порядка точности по времени и второго порядка по пространству [7].

Предполагалось, что в начальный момент суспензия неподвижна, концентрация частиц однородна во всей нижней части камеры, а ее небольшая верхняя часть занята чистой жидкостью. Выбранное значение безразмерного параметра B соответствует, например, седиментации частиц песка размером порядка $100\ \mu\text{m}$ и объемной концентрацией порядка 10^{-3} в сосуде, заполненном силиконом, с линейным размером порядка десяти сантиметров.

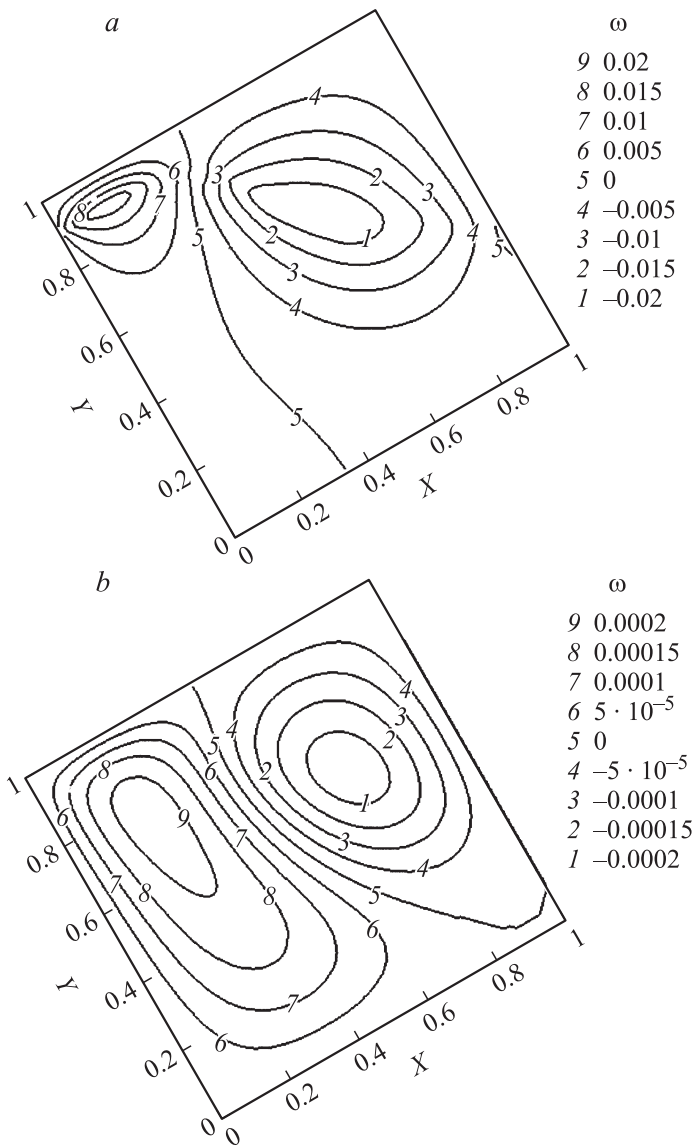


Рис. 1. Изолинии: *a* — интенсивности вихря при $t = 0.13$, $\Theta = \pi/6$, $B = 1.6 \cdot 10^3$; *b* — функции тока при $t = 0.13$, $\Theta = \pi/6$, $B = 1.6 \cdot 10^3$.

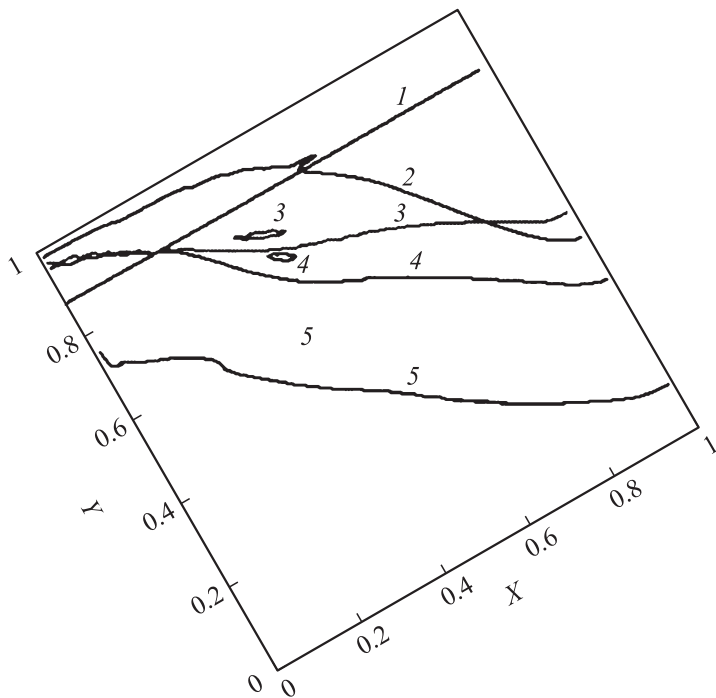


Рис. 2. Форма поверхности дисперсной фазы в моменты времени 1–5 ($t = 0$, $t = 0.13$, $t = 0.26$, $t = 0.39$, $t = 0.78$) при $\Theta = \pi/6$, $B = 1.6 \cdot 10^3$.

Механизм изменения эффективной скорости оседания дисперсной примеси из-за наклона сосуда связан с формированием крупномасштабных вихревых зон в несущей фазе. Вихри рождаются на стенках сосуда и в областях больших градиентов концентрации частиц в направлении, перпендикулярном силе тяжести. Через некоторое время после начала процесса оседания в камере формируются разнонаправленные вихри (рис. 1, *a*), а при этом наиболее интенсивное движение несущей фазы происходит вокруг центра основной вихревой зоны (рис. 1, *b*).

Последовательное положение верхней границы оседающей суспензии показано на рис. 2. Образующиеся вихри могут приводить к возникновению разрывов в дисперсной фазе. На рис. 2 видно, что на гра-

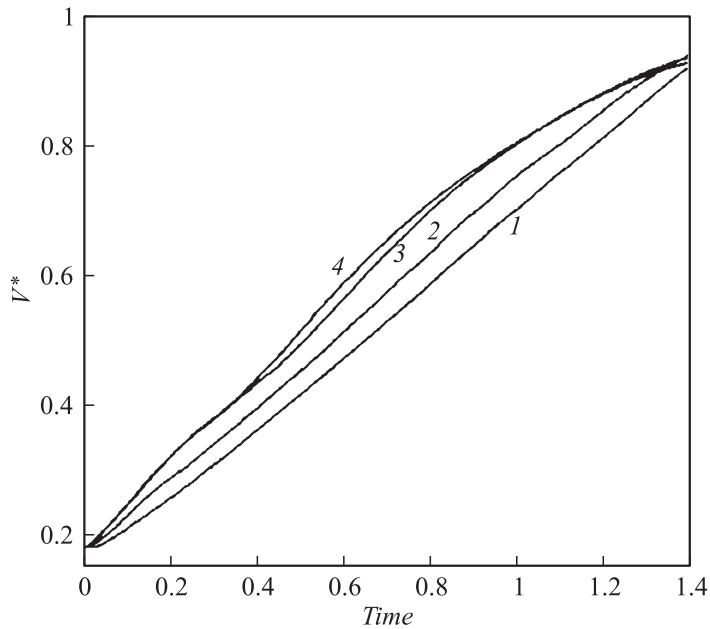


Рис. 3. Изменения объемной доли чистой жидкости в зависимости от времени при $B = 1.6 \cdot 10^3$ и $\Theta = 0$ (1), $\Theta = 15^\circ$ (2), $\Theta = 30^\circ$ (3), $\Theta = 45^\circ$ (4).

нице между разнонаправленными вихрями часть поверхности суспензии „приподнимается“, а затем образуется „оторвавшийся фрагмент“ суспензии. Расчеты показали, что существуют режимы течения, в которых может возникать несколько фрагментов суспензии, чередующихся с чистой жидкостью. Факт возникновения расслоений в дисперсной фазе при оседании частиц в замкнутых областях согласуется с результатами экспериментов [8].

Для оценки зависимости времени осаждения дисперсной фазы от угла наклона сосуда Θ исследовалось изменение доли объема, занятого чистой жидкостью V^* , в зависимости от времени (рис. 3). Как показывают расчеты, увеличение угла наклона приводит к значительному (15–20%) ускорению процесса осаждения дисперсной фазы.

Пересечение кривых 3 и 4 на рис. 3 на момент окончания расчета означает следующее: несмотря на то, что при угле $\Theta = \pi/4$ (кривая 4)

происходит некоторое ускорение процесса оседания, это ускорение нивелируется на более поздней стадии, когда остается 20–25% массы частиц. Расчеты показывают, что наиболее быстро 95% начальной массы частиц оседает при угле наклона $\Theta = \pi/6$.

Таким образом, предложенная модель гравитационной конвекции в дисперсной среде позволяет качественно и количественно описать эффект изменения эффективной скорости оседания примеси в течениях с макромасштабными вихревыми зонами.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (08-01-00195) и аналитической ведомственной целевой программы „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект 2.1.1/1399).

Список литературы

- [1] *Asmolov E.S.* // Phys. Fluids. 2004. V. 16. N 8. P. 3086–3093.
- [2] *Acrivos A., Herbolzheimer E.* // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. P. 435–457.
- [3] *Michaelides E.E.* // J. Fluids Eng. 2003. V. 125. P. 209–238.
- [4] *Невский Ю.А., Осипцов А.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. 2008. № 4. С. 37–44.
- [5] *Низматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
- [6] *Maxey M.R., Riley J.J.* // Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 883–896.
- [7] *Корнев А.А., Чижонков Е.В.* Упражнения по численным методам. Ч. 1 и 2. М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2002.
- [8] *Blanchette F.A.* Sedimentation in stratified ambient // Phd Thesis. Massachusetts Inst. of Tech. 2003. 115 p.