

01;05

Расширение проводящей оболочки магнитным полем внешнего индуктора

© Г.Ш. Болтачев, Н.Б. Волков

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: grey@ier.uran.ru

Поступило в Редакцию 10 октября 2008 г.

Аналитически решена задача о диффузии магнитного поля во внутреннюю полость цилиндрической полой протяженной оболочки. В случае импульса внешнего поля в виде одной полуволны $B_e = B_m \sin(\pi t/T)$ локализована область геометрических размеров оболочки (толщина, диаметр), в которой возможно ее расширение под действием остаточного магнитного поля во внутренней полости

PACS: 41.20.Gz, 84.70.+p

Известно, что в сильном импульсном магнитном поле, приложенном к проводящей оболочке снаружи, происходит ее сжатие в радиальном направлении [1]. Данный эффект используется, в частности, при магнитно-импульсном прессовании порошков [2,3] в условиях так называемой схемы θ -пинча. Помимо сжатия, теоретически предсказана возможность индукционного расширения проводящей оболочки при внешнем расположении индуктора [1], когда импульс внешнего поля имеет форму треугольника с плавным нарастанием и резким спадом. Однако в реальных условиях внешнее магнитное поле создается соленоидом, являющимся частью электрического колебательного контура. При разряде на соленоид емкостного накопителя энергии и использовании в качестве ключей вакуумных разрядников, обладающих диодными свойствами, форма импульса магнитного поля близка к одной полуволне синуса: $B_e = B_m \sin(\pi t/T)$, где B_m — амплитуда, T — длительность импульса. Заметим также, что амплитуда B_m генерируемого поля для современных неразрушаемых соленоидов ограничена величиной порядка 25 Т. Поэтому неизвестно, хватит ли остаточного (по завершении внешнего импульса) магнитного поля во внутренней полости оболочки для преодоления ее предела текучести. Реализация такого способа рас-

ширения при магнитно-импульсном прессовании, в частности, позволит осуществить выпрессовку предварительно сформованной порошковой заготовки из металлической оболочки.

Для ответа на поставленный вопрос необходимо решить уравнение диффузии магнитного поля, которое в условиях цилиндрической симметрии имеет вид

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r}, \quad (1)$$

где $B(r, t)$ — индукция магнитного поля, $\kappa = \rho/\mu$ — коэффициент диффузии, ρ — удельное электрическое сопротивление оболочки, $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Н/м — магнитная проницаемость. Начальное условие к уравнению (1) — $B(r, t = 0) = 0$. Граничное условие на внутренней поверхности проводящей цилиндрической оболочки ($r = a$) определяется законом индукции, а на внешней поверхности ($r = b$) — изменением внешнего поля:

$$\left. \frac{\partial B}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{a}{2\kappa} \left. \frac{\partial B}{\partial t} \right|_{r=a}; \quad B(b, t) = B_e(t).$$

В рамках преобразования Лапласа [4]

$$A(r, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} B(r, t) dt$$

сформулированная выше задача для изображения $A(r)$ (зависимость от параметра p для краткости будем опускать) искомой функции $B(r, t)$ имеет вид уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dA}{dz} + A = 0, \quad (2)$$

с граничными условиями

$$A(z_b) = A_e, \quad \left. \frac{dA}{dz} \right|_{z=z_a} = i \frac{a}{2} \sqrt{\frac{p}{\kappa}} A(z_a), \quad (3)$$

где $z(r) = \beta r$, $\beta = -i\sqrt{p/\kappa}$, $z_a = z(a)$, $z_b = z(b)$, A_e — изображение $B_e(t)$. Решение задачи (2), (3) имеет вид

$$A(z) = A_e \frac{F(z)}{F(z_b)}, \quad (4)$$

$$F(z) = Y_0(z) \left[J_1(z_a) + i \frac{a}{2} \sqrt{\frac{p}{\kappa}} J_0(z_a) \right] - J_0(z) \left[Y_1(z_a) + i \frac{a}{2} \sqrt{\frac{p}{\kappa}} Y_0(z_a) \right], \quad (5)$$

где J_k, Y_k — функции Бесселя первого и второго рода k -го порядка.

Как известно [4], решение для произвольного граничного условия $B_e(t)$ (включаемого в момент времени $t = 0$) может быть легко сконструировано на основе решения, отвечающего „постоянным“ граничным условиям

$$B_e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ B_0, & t \geq 0, \end{cases} \quad A_e = \frac{B_0}{p}. \quad (6)$$

Соотношения (4)–(6), с учетом известных свойств функций Бесселя [5], дают для поля внутри проводящей оболочки

$$A_i = \frac{B_0}{p} \frac{2}{\pi z_a} \frac{1}{F(z_b)}.$$

В итоге, выполняя обратное преобразование, для поля $B_i(t)$ получаем

$$\frac{B_i}{B_0} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_n \frac{\exp(-\kappa \beta_n^2 t)}{\beta_n^2 a^2 g(\beta_n)}, \quad (7)$$

где

$$g(\beta) = \frac{\beta a}{2} s_2 - \frac{b}{a} s_4 + \frac{\beta b}{2} s_3, \quad (8)$$

а β_n — корни уравнения

$$F(z_b) = \frac{\beta a}{2} s_1 - s_2 = 0. \quad (9)$$

В соотношениях (8), (9) для краткости записи введены обозначения

$$s_1 = J_0(\beta b) Y_0(\beta a) - Y_0(\beta b) J_0(\beta a), \quad s_2 = J_0(\beta b) Y_1(\beta a) - Y_0(\beta b) J_1(\beta a),$$

$$s_3 = J_1(\beta b) Y_0(\beta a) - Y_1(\beta b) J_0(\beta a), \quad s_4 = J_1(\beta b) Y_1(\beta a) - Y_1(\beta b) J_1(\beta a).$$

Подставляя (7) в интеграл Дюамеля [4], запишем решение задачи для произвольного граничного условия $B_e(t)$:

$$B_i(t) = \frac{4\kappa}{\pi a^2} \sum_n \frac{1}{g(\beta_n)} \int_0^t B_e(x) e^{-\kappa \beta_n^2 (t-x)} dx. \quad (10)$$

В частности, для импульса внешнего поля в виде одной полуволны

$$B_e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \quad t > T, \\ B_m \sin(\omega t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (11)$$

где $\omega = \pi/T$, общее выражение (10) после преобразований дает

$$\begin{aligned} \frac{B_i(t)}{B_m} &= \Phi_1 + \Phi_2 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (12) \\ \Phi_1 &= \sin(\omega t) - \frac{\delta_0^2}{\pi a^2} \sum_n \frac{\sin \omega t}{g(\beta_n)} \frac{(w/\kappa\beta_n^2)}{1 + (\kappa\beta_n^2/w)^2} \\ &\quad - \frac{\delta_0^2}{\pi a^2} \sum_n \frac{\cos(\omega t)}{g(\beta_n)} \frac{1}{1 + (\kappa\beta_n^2/w)^2}, \\ \Phi_2 &= \frac{\delta_0^2}{\pi a^2} \sum_n \frac{1}{g(\beta_n)} \frac{e^{-\kappa\beta_n^2 t}}{1 + (\kappa\beta_n^2/w)^2}, \end{aligned}$$

$\delta_0 = \sqrt{2\kappa/w}$ — классическая толщина скин-слоя [1]. Отметим, что стационарную часть решения (Φ_1) можно записать в более компактном виде. Для этого достаточно рассмотреть периодическое граничное условие $B_e(t) = -iB_m e^{i\omega t}$ и взять решение, соответствующее вычету со значением $p = i\omega$, что дает

$$\Phi_1(t) = \frac{\delta_0}{\pi a} \operatorname{Re} \left[\frac{B_e(t)}{B_m} \frac{1+i}{F(z_b)} \Big|_{p=i\omega} \right].$$

Наконец, для интервала $t > T$ из соотношения (10) получим

$$\frac{B_i(t)}{B_m} = \frac{4\kappa}{\pi a^2 w} \sum_n \frac{e^{-\kappa\beta_n^2(t-T)}}{g(\beta_n)} \frac{e^{-\kappa\beta_n^2 T} + 1}{1 + (\kappa\beta_n^2/w)^2}. \quad (13)$$

Решение, определяемое формулами (12) и (13) для проводящей оболочки из меди ($\rho = 17.2 \cdot 10^{-9} \Omega \cdot \text{m}$), представлено на рис 1. Там же для сравнения приводится решение, соответствующее традиционно используемому приближению плоских волн [6].

Наличие остаточного магнитного поля во внутренней полости проводящей оболочки приводит к появлению расширяющих усилий,

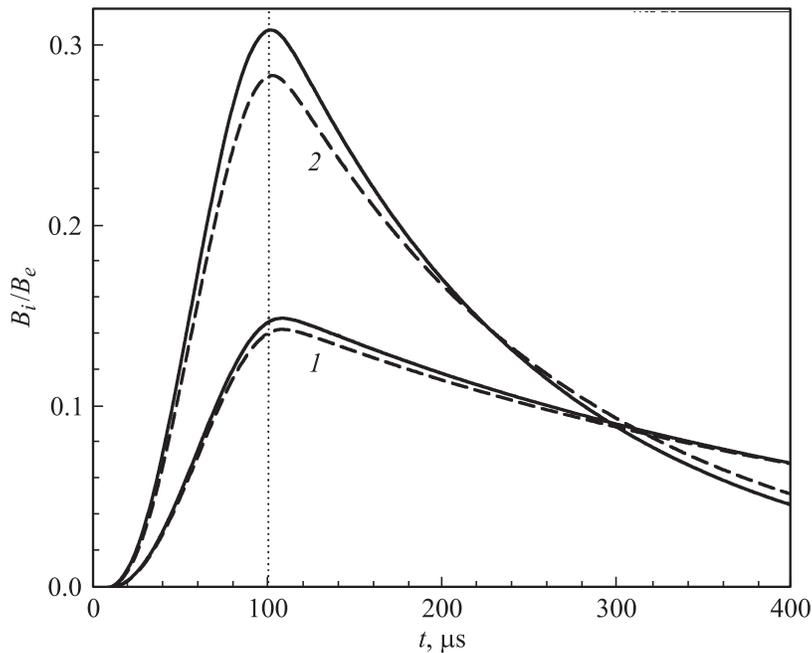


Рис. 1. Отношение амплитуд магнитного поля внутри и снаружи проводящей оболочки из меди, определяемое уравнениями (12) и (13). Длительность внешнего импульса $T = 100 \mu\text{s}$, толщина оболочки $d = 1 \text{ mm}$, радиус $a = 10 \text{ mm}$ 1 и 4 mm 2. Штриховые линии соответствуют приближению плоских волн [6].

амплитуду которых характеризуют так называемым магнитным давлением — $p_m(t) = (B_i^2 - B_e^2)/(2\mu)$. Этим усилиям противодействуют упругие напряжения. Максимальная разность давлений (изнутри и снаружи) p_{el} , которую может упруго компенсировать цилиндрическая оболочка, определяется достижением предела текучести τ ее материалом вблизи внешней поверхности. В соответствие с результатами решения классической задачи Ламе можем записать [3]

$$p_{el} = \frac{\tau}{\sqrt{2}} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right).$$

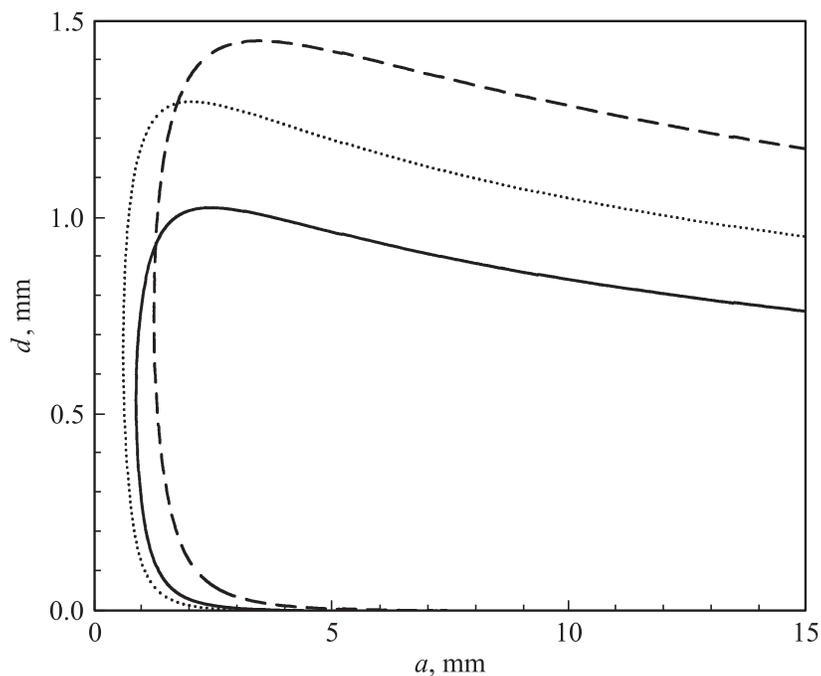


Рис. 2. Граница области возможного расширения проводящей оболочки из меди в координатах „толщина оболочки d –внутренний радиус a “ для различных параметров импульса внешнего магнитного поля (11). Сплошная линия — $B_m = 25$ Т, $T = 100 \mu\text{s}$, штриховая — $B_m = 25$ Т, $T = 200 \mu\text{s}$, пунктирная — $B_m = 35$ Т, $T = 100 \mu\text{s}$.

Будем полагать, что расширение оболочки реализуется при условии $p_m(T) > p_{el}$. Тогда соотношение

$$\frac{B_i^2(T)}{2\mu} = \frac{\tau}{\sqrt{2}} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \quad (14)$$

определяет границу области возможного расширения проводящей оболочки за счет действия остаточного магнитного поля.

Данная граница в координатах „толщина–радиус“, рассчитанная по уравнениям (12)–(14) для медной оболочки ($\tau \cong 60$ МПа) при различных параметрах внешнего импульса (11), представлена на рис. 2. Расчеты, в частности, показывают, что достичь эффекта расширения оболочки можно не только за счет увеличения амплитуды V_m внешнего поля, но и меняя длительность T внешнего импульса.

Таким образом, в результате проведенного исследования на основе точного решения задачи о диффузии внешнего магнитного поля во внутреннюю полость цилиндрической проводящей оболочки локализована область геометрических размеров оболочки (толщина, диаметр), в которой возможно ее расширение за счет действия остаточного магнитного поля.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 08-08-00123-а.

Список литературы

- [1] Шнеерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. Л.: Энергоиздат, 1981.
- [2] Болтачев Г.Ш., Волков Н.Б., Добров С.В., Иванов В.В., Ноздрин А.А., Паранин С.Н. // ЖТФ. 2007. Т. 77. В. 10. С. 58.
- [3] Болтачев Г.Ш., Волков Н.Б., Иванов В.В., Паранин С.Н. // ПМТФ. 2008. В. 2. С. 211.
- [4] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
- [5] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М.: Наука, 1979.
- [6] Витков М.Г. // ЖТФ. 1965. Т. 35. В. 3. С. 410.