

01;03

## Условие скольжения на поверхности модельной волокнистой пористой среды

© *Е.В. Мосина, И.В. Чернышев*Волгоградский государственный университет  
E-mail: katefrkate@mail.ru*В окончательной редакции 26 сентября 2008 г.*

Решена задача о медленном двумерном сдвиговом течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, частично заполненном волокнистой пористой средой, которая моделируется правильной упаковкой квадратных цилиндров, расположенных поперек потока. Численно найдены гидродинамические микроскопические поля скорости. Макроскопическим усреднением получен коэффициент скольжения на эффективной границе такой пористой среды.

PACS: 47.15.G-, 47.56.+г

В ряде технологических процессов — газоочистка, нефтедобыча, экстрагирование — движение жидкости происходит в присутствии пористых тел или границ. Расчет гидродинамических характеристик таких течений сводится к совместному решению двух задач: внешнего обтекания жидкостью пористых тел или поверхностей и внутреннего течения сквозь пористый материал. Фильтрационные потоки обычно рассматриваются в рамках модели сплошной среды на основе уравнения Дарси

$$\mu \mathbf{U} = -k \nabla P, \quad \nabla \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{U}, P$  — скорость и давление жидкости в пористой среде,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости,  $k$  — коэффициент проницаемости пористой среды. Медленное движение жидкости во внешней области удовлетворяет уравнениям Стокса

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}, p$  — скорость и давление жидкости вне пористого материала.

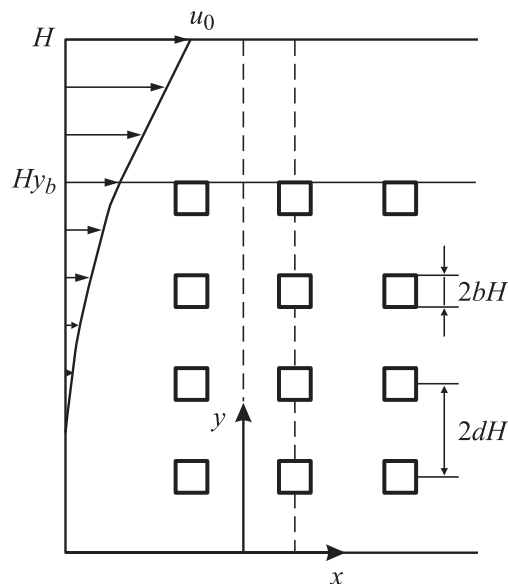
В качестве граничных условий на пористой поверхности наиболее часто используются условия непрерывности давления и нормальной компоненты скорости и условие скольжения Саффмана для тангенциальной составляющей скорости [1,2]

$$u_\tau - U_\tau = \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3)$$

Благодаря „коэффициенту скольжения“  $\alpha$  в этом условии макроскопически учтены не только объемные структурные характеристики пористого тела, но и физические свойства границы жидкость–пористая среда. Параметр  $\alpha$  определяется либо экспериментально, либо из микроскопических гидродинамических решений модельных постановок, наиболее адекватно описывающих переход жидкость–пористый материал. Для сред со случайной структурой порового пространства известен приближенный интервал изменения коэффициента скольжения [1]  $0.1 \leq \alpha \leq 4$ . Однако во многих задачах фильтрации, например в искусственных микрофильтрах, тканях и волокнистых композитных материалах, пористая среда имеет регулярную структуру, и ее параметры можно варьировать в широком диапазоне.

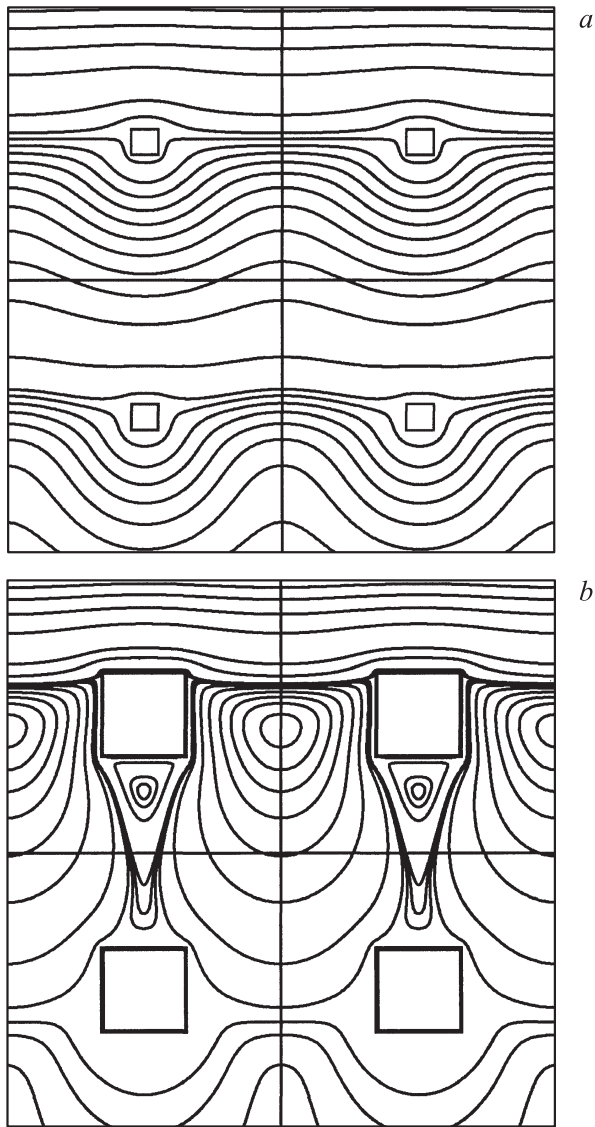
В настоящей работе рассмотрена задача о медленном ( $Re \ll 1$ ) сдвиговом течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, верхняя стенка которого движется плоскопараллельно с постоянной скоростью  $u_0$ . Нижняя часть канала заполнена упорядоченной системой квадратных цилиндров (волокон), ориентированных поперек потока и расположенных в узлах квадратной решетки (рис. 1). Такая постановка моделирует течение в окрестности однородной и изотропной волокнистой среды. За эффективную границу  $H_{y_b}$  такой пористой среды взята плоскость, касательная к внешней поверхности верхнего ряда цилиндров.

Двумерное течение во всем канале, включая внутреннюю область между цилиндрами, рассматривается в приближении Стокса (2). Учитывая периодичность постановки и симметрию основных уравнений, краевую задачу можно решать в половине периода в продольном направлении (показано пунктиром на рис. 1). В качестве условий на границах такой расчетной области взяты условия прилипания на стенках канала и поверхности каждого цилиндра, на вертикальных границах условия симметрии поля скорости и отсутствия градиента давления.



**Рис. 1.** Геометрия канала, частично заполненного упорядоченной системой квадратных цилиндров.

Гидродинамические поля скорости и давления получены в результате прямого численного решения на разнесенной неравномерной сетке со сгущениями вблизи поверхности цилиндров. Конфигурации канала отличаются количеством горизонтальных рядов цилиндров  $L$ , степенью заполненности канала цилиндрами  $F = 2dL$ , их размером  $2b$  и расстоянием между ними  $2d$ , обезразмеренными на ширину канала  $H$  (см. таблицу). На рис. 2 изображены характерные линии тока для вариантов (3) и (5) из таблицы. Для большей визуальной детализации течения в окрестности верхних рядов цилиндров использован более мелкий шаг линий тока. При малых объемных концентрациях цилиндров  $\phi = b^2/d^2 < 0.01$  продольная составляющая скорости жидкости в области пористой среды положительна и монотонно уменьшается до нуля на нижней стенке канала. Увеличение размеров цилиндров ( $\phi > 0.01$ ), а значит, и увеличение их сопротивления потоку приводит к возникновению циркуляционных течений между цилиндрами.



**Рис. 2.** Линии тока в окрестности верхних двух рядов цилиндров для конфигураций из таблицы:  $a$  — (3);  $b$  — (5).

Результаты для некоторых конфигураций канала с цилиндрами

№	$L$	$F$	$d$	$b$	$\phi$	$k \cdot 10^3$	$h_p/2d$	$\alpha$
1	5	0.50	0.0500	0.00158	0.001	2.1620	2.00	3.61
2	15	0.75	0.0250	0.00079	0.001	0.5405	2.01	3.58
3	5	0.50	0.0500	0.00500	0.010	1.2530	1.44	4.68
4	15	0.75	0.0250	0.00250	0.010	0.3133	1.45	4.64
5	5	0.50	0.0500	0.01581	0.100	0.4085	0.19	5.87
6	20	0.75	0.0118	0.00593	0.100	0.0574	0.19	5.80
7	5	0.50	0.0500	0.02236	0.200	0.2123	0.15	7.00
8	10	0.50	0.0250	0.01118	0.200	0.0531	0.15	6.89
9	5	0.50	0.0500	0.03162	0.400	0.0765	0.10	9.00
10	15	0.50	0.0167	0.01054	0.400	0.0085	0.11	8.61
11	15	0.50	0.0167	0.01291	0.600	0.0018	0.08	9.94
12	15	0.75	0.0250	0.01937	0.600	0.0040	0.07	10.12

Вычисление коэффициента проницаемости  $k$  при поперечном обтекании разреженной ( $\phi \approx 0.001 \div 0.2$ ) квадратной решетки квадратных цилиндров проведено по формуле из работы [3]

$$\frac{k}{b^2} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{8\phi} \left( \ln \frac{1}{\phi} - 1.476 + 2\phi \right),$$

где  $\sigma$  — коэффициент формы, в случае квадратных цилиндров  $\sigma = \sqrt{\pi}/2$ . Для более плотных упаковок ( $\phi \approx 0.2 \div 0.6$ ) использована зависимость

$$\frac{k}{b^2} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{8\phi} \left( \ln \frac{1}{\phi} - \frac{1 - \phi^2}{1 + \phi^2} \right),$$

полученная из соотношения Кармана–Козени, в котором коэффициент Козени рассчитан на основе ячеечной модели [4]. Приведенные формулы удовлетворительно согласуются с результатами [5] для неограниченной совокупности квадратных стержней (волокон).

Определим „глубину проникновения“  $h_p$  внешнего течения из свободной части канала в пористую среду как расстояние от номинальной границы области цилиндров  $y_b$  до того уровня, где скорость фильтрации составляет менее 1% от скорости на границе. При сдвиговом течении глубина проникновения составила не более двух рядов даже при малых объемных концентрациях  $\phi \approx 0.001$  (см. таблицу). Как следствие,

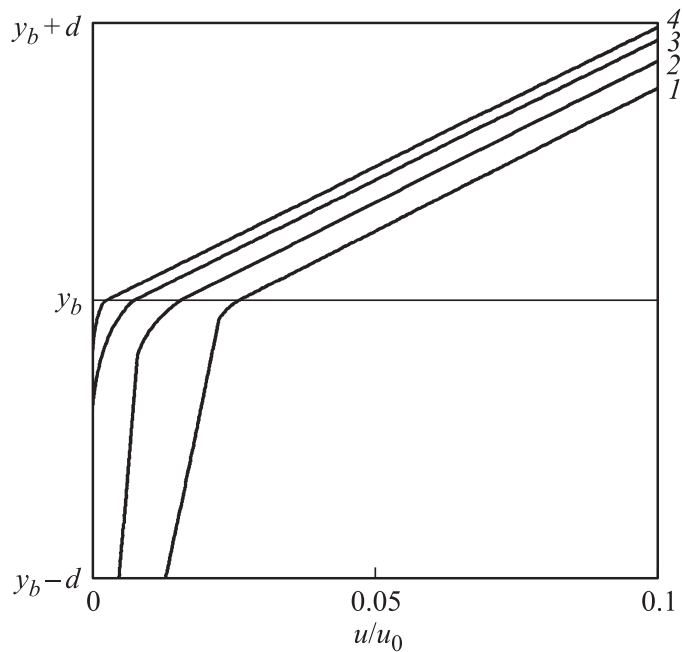
гидродинамические характеристики течения вблизи пористой границы практически не зависят от внутренних свойств пористой среды. При большом количестве рядов цилиндров (более пяти) нижняя стенка канала не оказывает существенного влияния на течение в верхних слоях пористой среды, что было проверено варьированием ее положения [6].

Усреднение микроскопических гидродинамических полей вдоль границы модельной пористой среды дает из условия (3) коэффициент скольжения

$$\alpha = \sqrt{k} \langle \partial u / \partial y \rangle / u_s, \quad (4)$$

где скорость скольжения  $u_s = \langle u \rangle$  и  $\langle \partial u / \partial y \rangle$  — усредненные на уровне  $y_b$  значения продольной составляющей скорости и ее нормальной производной. Расчеты для различных конфигураций канала и системы цилиндров показали, что коэффициент  $\alpha$  при сдвиговом обтекании волокнистой среды главным образом зависит от объемной концентрации цилиндров  $\phi$  и практически не зависит от других индивидуальных параметров:  $L, F, b$  и  $d$  (см. таблицу). Для объемных концентраций  $\phi = 0.001, 0.01, 0.1$  коэффициент  $\alpha$  принимает в среднем значения 3.6, 4.6, 5.8 соответственно. Чем больше размеры поперечного сечения включений, тем меньше проницаемость и глубина проникновения внешнего течения в пористую среду, следовательно меньше скорость скольжения  $u_s$  и больше градиент скорости  $\langle \partial u / \partial y \rangle$  на границе жидкость—пористая среда (рис. 3), что приводит к возрастанию коэффициента скольжения. При больших значениях  $\phi = 0.2, 0.4, 0.6$ , соответствующих реальным фильтрующим материалам (натуральным и синтетическим волокнам), коэффициент  $\alpha$  приблизительно равен 6.9, 8.7, 10.0 соответственно, что значительно выше, чем в экспериментах [1] для гранулированной и ячеистой пористых сред.

В работе [7] проведено подобное теоретическое исследование двумерного сдвигового течения в канале, частично заполненном круговыми цилиндрами, но только для малых объемных концентраций цилиндров  $\phi$ , поскольку применялся метод сингулярностей. В этом случае коэффициент скольжения имеет меньшие значения, чем для квадратных цилиндров, и равен 3.4, 4.0, 4.3 для  $\phi = 0.001, 0.01, 0.1$  соответственно. Причиной является то, что для квадратных цилиндров рассматриваемая номинальная граница содержит более протяженные участки прилипания. Вообще говоря, как было показано в [1], сам



**Рис. 3.** Усредненный по линиям  $y = \text{const}$  профиль продольной скорости  $u$  ( $L = 5$ ,  $F = 0.5$ ,  $d = 0.05$ ); 1 —  $\phi = 0.001$ ; 2 —  $\phi = 0.01$ ; 3 —  $\phi = 0.1$ ; 4 —  $\phi = 0.4$ .

вопрос о положении эффективной границы пористой среды является дискуссионным.

Исследуемая в работе модель волокнистой пористой среды наиболее адекватно подходит для описания искусственно полученных фильтров из металлических волокон или стружек, стекловолокна, синтетических волокон и др., а для коэффициента скольжения  $\alpha$  можно использовать следующую аппроксимирующую зависимость:

$$\alpha = 3.4 + 8.3\sqrt{\phi},$$

относительные отклонения которой для рассмотренных значений объемной концентрации  $\phi$  не превышают 10%.

## Список литературы

- [1] *Beavers G.S., Joseph D.D.* // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Part 1. P. 197–207.
- [2] *Saffman P.G.* // Stud. App. Math. 1971. V. 50. N 2. P. 93–101.
- [3] *Jackson G.W., James D.F.* // Can. J. Chem. Engng. 1986. V. 64. P. 364–374.
- [4] *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. (*Happel J., Brenner H.* Low Reynolds Number Hydrodynamics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965).
- [5] *Wang C.Y.* // Int. J. Multiphase Flow. 1996. V. 22. N 1. P. 185–194.
- [6] *Мосина Е.В.* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 36. Казан. матем. общ-во // Материалы VI Молодежной шк.-конф. „Лобачевские чтения-2007“. Казань: Изд-во Казан. матем. общ-ва, 2007. С. 156–158.
- [7] *James D.F., Davis A.M.J.* // J. Fluid Mech. 2001. V. 426. P. 47–72.