01;06

Резонансные эффекты в искривленных квантовых волноводах, связанных через отверстия

© *Е.С. Трифанова*

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
E-mail: etrifanova@gmail.com

Поступило в Редакцию 3 июля 2008 г.

Исследуется система двух плоских искривленных волноводов, связанных через малое отверстие. На внешних границах волноводов ставятся условия Дирихле, на границах, содержащих отверстие, — условия Неймана. Получено асимптотическое разложение (по ширине отверстия) резонанса, вызванного отверстием, и связанного состояния, вызванного кривизной. Используется техника согласования асимптотических разложений решений краевых задач.

PACS: 73.23.Ad, 73.21.Ac, 72.10.Fk

В связи с широким использованием плоских наноструктур с искривленными границами возникает необходимость детального изучения электронного транспорта в них. Из-за кривизны структур явления, наблюдавшиеся в двумерных структурах, приобретают специфические черты и, кроме того, появляются совершенно новые эффекты [1]. В частности, возникают дополнительные связанные состояния электронов, резонансные эффекты, отсутствующие в случае прямых границ, изменяется проводимость структур. Для описания баллистического транспорта используют как численные методы, так и различные модели, основанные на всевозможных методах — от классической теории волноводов [2–5] до квантовой механики в искривленных пространствах [6–8].

В работе рассматривается баллистический электронный транспорт в системе двух искривленных плоских волноводов Ω_+, Ω_- с ширинами d_+, d_-, соединенных малым отверстием диаметром $2a$. С математической точки зрения задача сводится к решению уравнения Гельмгольца в составной области. На внешних границах ставятся условия Дирихле, а на границах, имеющих отверстие, — условия Неймана (рис. 1).

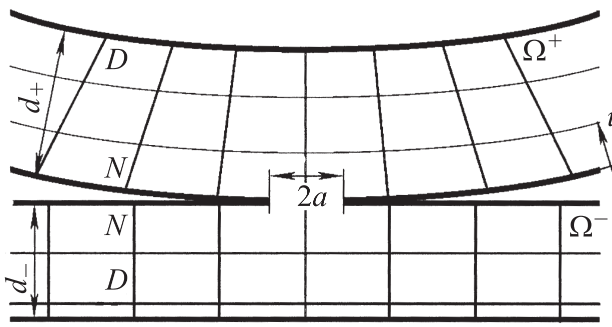

Рис. 1. Искривленный волновод, соединенный с прямым. Буквами D и N обозначены граничные условия соответственно Дирихле и Неймана.

Задача о связанных состояниях для одиночного искривленного волновода рассматривалась многими авторами (например, [2,3]). Связанные искривленные волноводы с граничными условиями Дирихле были рассмотрены в [4].

Рассмотрим для начала одиночный искривленный волновод Ω шириной d. Пусть на выпуклой границе выполняется условие Дирихле, а на вогнутой — условие Неймана. Выберем одну из границ Γ области Ω в качестве базисной. С точностью до евклидовых преобразований Ω однозначно характеризуется шириной d и кривизной $s \to \kappa(s)$, где s — естественная координата вдоль кривой Γ. Пусть функция κ — гладкая ограниченная, с ограниченной производной вплоть до второго порядка, и $\kappa(s) \to 0$ при $|s| \to \infty$. Введем локальные ортогональные координаты s, u. Тогда лапласиан в новых координатах будет иметь вид:

$$H = -\frac{\partial}{\partial s}(1 + u\kappa)^{-2}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial u^2} + V(s, u), \tag{1}$$

на пространстве L_2 $(\mathbf{R} \times [0, d])$, где

$$V(s, u) = -\frac{\kappa^2}{4(1 + u\kappa)^2} + \frac{u\kappa''}{2(1 + u\kappa)^3} - \frac{5u^2(\kappa')^2}{4(1 + u\kappa)^4}. \tag{2}$$

Оператор H является самосопряженным на $D(H) = \{\psi; \psi \in C^\infty, \psi_u(s, d) = \psi'_u(s, 0) = 0, H\psi \in L_2\}$. В [3] было показано, что оператор H имеет изолированное собственное значение (вызванное кривизной).

Теперь рассмотрим систему, в которой к описанному волноводу присоединен через малое отверстие, находящееся на границе с условиями Неймана, еще один прямой волновод (рис. 1). В работах [2,4] показано, что если ширина присоединенного волновода достаточно большая, то собственное значение, вызванное кривизной, становится резонансом (квазисобственным значением).

Пусть λ_0 — собственное значение для волновода Ω_- шириной d_-, вызванное кривизной. Так как на одной из границ выполнены условия Дирихле, то $\lambda_0 > 0$. Наличие второго присоединенного волновода Ω_+ шириной d_+ меняет ситуацию. А именно, если $\lambda_0 > \frac{1}{4}\pi^2 d_+^{-2}$, то собственное значение становится резонансом (k_a^2). В работе [9] получены асимптотические оценки резонанса для резонатора Гельмгольца (резонатор, связанный через малое отверстие в границе со всем пространством) с граничными условиями Неймана. В нашем случае легко получить аналогичные формулы:

$$k_a = k_0 + \tau_1 \ln^{-1}(a/d_-) + \tau_2 \ln^{-2}(a/d_-) + o\big(\ln^{-2}(a/d_-)\big), \qquad (3)$$

$$k_0 = \sqrt{\Lambda_0}, \quad \tau_1 = -\frac{\pi\varphi^2(0)}{4k_0}, \quad \operatorname{Im}\tau_2 = -\frac{1}{8}\big(\pi\varphi(0)\big)^2 \operatorname{Im} g^+(0, k_0),$$

где φ — собственная функция, соответствующая собственному значению Λ_0, $g^+(0, k_0)$ — регулярная часть функции Грина для волновода.

Так как резонанс возникает и в прямых соединениях волновода (благодаря наличию отверстия связи) [5], то необходимо изучить, какие изменения происходят при искривлении одного или обоих волноводов. Будем считать, что в некоторой окрестности отверстия кривизна границы волновода равна нулю и $d_+ > d_-$. Тогда для получения асимптотических оценок резонанса k_a^2, близкого ко второму порогу непрерывного спектра λ_0 (для прямого волновода со смешанными граничными условиями $\lambda_0 = \frac{9\pi^2}{4d_+^2}$), используем метод согласования асимптотических разложений [10]. Будем искать асимптотическое разложение не самого резонанса k_a^2, а некоторой функции $\gamma(k_a)$ от него. А именно, найдем коэффициенты следующего разложения:

$$\gamma(k_a) = \sqrt{\lambda_0 - k_a^2}$$
$$= \tau_1 \ln^{-1}(a/d_-) + \tau_2 \ln^{-2}(a/d_-) + o\big(\ln^{-2}(a/d_-)\big). \qquad (4)$$

Квазисобственная функция $\psi_a(x)$, соответствующая резонансному состоянию, ищется в виде

$$\psi_a(X) = \begin{cases} \pm\gamma_a \alpha G^{\pm}\big(X, (x, 0), k_a\big) + \ldots, & X \in \Omega^{\pm} \backslash S_{\sqrt{a}}, \\ \nu_0\left(\frac{X}{a}\right) + \nu_1\left(\frac{X}{a}\right) \ln^{-1}(a/d_-) + \ldots, & X \in S_{2\sqrt{a}}, \end{cases} \qquad (5)$$

где $G^{\pm}(X, X', k_a)$ — функции Грина для верхнего и нижнего волноводов, $X = (x_1, y_1)$, S_t — круг радиуса R с центром в середине отверстия, α — некоторый коэффициент. Согласование для старших членов фактически сводится к поиску таких „склеивающих“ функций $\nu_0(X/a)$, $\nu_1(X/a)$, удовлетворяющих краевым условиям Неймана и уравнению Лапласа, что члены соответствующих порядков в асимптотических разложениях решений (5) будут совпадать в областях: $(\Omega^+ \backslash S_{\sqrt{a}}) \cap S_{2\sqrt{a}}$, $(\Omega^- \backslash S_{\sqrt{a}}) \cap S_{2\sqrt{a}}$.

Запишем асимптотику функции Грина в окрестности точки (0,0) следующим образом:

$$\begin{aligned} G^+(X, 0, k_a) &= \frac{\psi(0)\psi(y_1)}{\gamma(k_a)} - \frac{1}{\pi} \ln|X| + g^+(X, k_a), \\ G^-(X, 0, k_a) &= -\frac{1}{\pi} \ln|X| + g^-(X, k_a), \end{aligned} \qquad (6)$$

где функция ψ — собственная функция по поперечной координате, функции $g^+(X, k_a)$, $g^-(X, k_a)$ не имеют особенностей во всей области волноводов.

Далее, приравнивая коэффициенты в членах одного порядка по a, находим значения коэффициентов в асимптотическом разложении (4):

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\pi}{2}\psi^2(0), \\ \tau_2 &= \tau_1 \left[\frac{\pi}{2}\big(g^+(0, k_0) + g^-(0, k_0)\big) + \ln 2\right]. \end{aligned} \qquad (7)$$

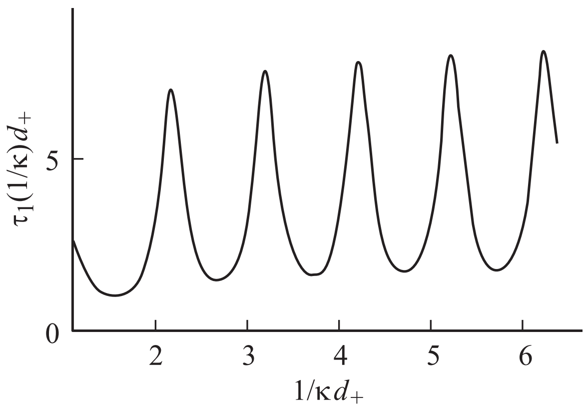

Рис. 2. График зависимости коэффициента τ_1 от радиуса кривизны $1/\kappa$ (см. (7), (4)).

На рис. 2 показан график зависимости коэффициента τ_1 от радиуса кривизны $1/\kappa$ при предположении постоянства кривизны в окрестности отверстия. В качестве единицы измерения выбрана ширина верхнего волновода.

Описанные резонансные эффекты существенно влияют на электронный транспорт, и поэтому их необходимо учитывать при разработке наноэлектронных устройств.

Автор благодарит профессора И.Ю. Попова за помощь и плодотворные дискуссии.

Работа поддержана грантом Минобрнауки РФ.

Список литературы

[1] *Объединенная* научная сессия Отделения физических наук Российской академии наук и Объединенного физического общества Российской Федерации „Электроны в криволинейных структурах" // УФН. 2005. Т. 175. № 9. С. 995–1000.
[2] *Duclos P., Exner P.* // Rev. Math. Phys. 1995. V. 7. P. 73–102.
[3] *Krejcirik D., Kriz J.* // J. Phys. A. 2004. V. 37. N 20. P. 5449–5466.

[4] *Popov I.Yu.* // Elsevier. Phys. Lett. A. 2000. V. 269.
[5] *Popov I.Yu., Tesovskaya E.S.* // TMPh. 2006. V. 146 (3). P. 429.
[6] *Chaplik A.V., Magarill L.I., Romanov D.A.* // Physica B. 1998. V. 249–251. P. 377–382.
[7] *Gritsev V.V., Kurochkin Yu.A.* // Phys. Rev. B. 2001. V. 64. P. 035308.
[8] *Karasev M.V.* // Russian Journal of Mathematical Physics. 2007. V. 14. N 1. P. 57.
[9] *Гадыльшин Р.Р.* // УМН. 1997. Т. 52. № 1. С. 3–76.
[10] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М., 1989. 334 с.