

01;03

Об оценке толщины слоя хаотизации в модели двухслойного топографического вихря

© Е.А. Рыжов, К.В. Кошель, Д.В. Степанов

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева
Дальневосточного отделения РАН, Владивосток
E-mail: ryzhovea@mail.ru

В окончательной редакции 4 февраля 2008 г.

Анализируется толщина стохастического слоя в модели двухслойной невязкой жидкости в однонаправленном пульсирующем фоновом течении над подводной горой дельтаобразной формы. Получены оценки ширины пограничного слоя между внешним проточным течением и вихревой областью, в котором происходит обмен частицами пассивной примеси между указанными областями. Исследованы пределы применимости полученных оценок. Выявлено скачкообразное изменение толщины слоя с ростом амплитуды возмущения.

PACS: 47.52.+j, 47.32.Ef, 92.10.-c

В рамках концепции фоновых течений [1,2] сформулировано и исследовано несколько моделей геофизических потоков, допускающих хаотическую адвекцию [2,3]. В рамках упомянутой концепции помимо рассмотрения баротропных моделей удастся учесть стратификацию. Простейший способ состоит в анализе двухслойной жидкости с разными плотностями в слоях [4,5]. Мы рассмотрим модель точечного топографического вихря, индуцированного взаимодействием проточного течения с подводной возвышенностью дельтаобразной формы. Безразмерные функции тока ψ_i в слоях имеют вид [4]

$$\psi_i = -W(t)y - \chi(\ln r - a_i K_0(r)). \quad (1)$$

Уравнения движения в этом случае имеют гамильтонову форму

$$\begin{cases} u_i = -\frac{\partial \psi_i}{\partial y} = W + \chi \frac{y}{r} \left(\frac{1}{r} + a_i K_r(r) \right), \\ v_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = -\chi \frac{x}{r} \left(\frac{1}{r} + a_i K_i(r) \right), \end{cases} \quad (2)$$

где $\chi = \sigma B$, $B = kL = O(1)$ — число Бургера, k — характерный масштаб длины, $\sigma = \frac{f_0 L}{U} \frac{h(0)}{H} \approx O(1)$, $\frac{f_0 L}{U} = \varepsilon$ — число Россби, $h(0)$ — возвышение рельефа дна, H — глубина потока, U — характерный масштаб скорости, W — скорость набегающего потока, x, y — декартовы координаты, r — полярный радиус, K_0, K_1 — модифицированные функции Бесселя, $a_1 = -1$, $a_2 = \frac{H_1}{H_2}$ — отношение толщин слоев. Ниже будем полагать $\chi = 1$, что соответствует характерному размеру вихря $L \sim 1/k \sim 70$ km, при значении параметра Кориолиса $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, соответствующего средним широтам.

Рассматриваемая модель помимо того, что позволяет оценить роль стратификации, имеет еще одну существенную особенность. Эта задача позволяет сравнить процессы хаотизации в сингулярной модели (нижний слой) и в регулярной модели (верхний слой) в рамках единой постановки. Дело в том, что модифицированные функции Бесселя $K_1(r)$ имеют асимптотики $1/r$ в окрестности нуля и из вида уравнений (1) или (2) ясно, что в верхнем слое поле скоростей не будет сингулярным, т. е. стратификация оказывает регуляризующее воздействие на эйлерово поле скоростей.

В стационарном потоке ($W(t) = W_0 = \text{const}$) система (2) имеет две стационарные точки в нижнем слое и при $W(t) = W_0 < W_{cr}$ (W_{cr} — максимальное значение азимутальной скорости) две стационарные точки в верхнем слое [4], эллиптическую и гиперболическую. Фазовый портрет системы имеет типичную гомоклиническую структуру [2]. При периодическом возмущении проточного течения траектории ведут себя хаотически и становится возможным обмен между вихревой и проточной областями потока.

Для оценки толщины стохастического слоя мы воспользуемся вариантом мельниковской теории, предложенным в работе [6] (см. также [7]). Для этого рассмотрим проточное течение вида $W = W_0 + \varepsilon_w W_0 \sin(\nu t)$, где ε_w — амплитуда, а ν — частота периодической компоненты скорости, W_0 — скорость потока в невозмущенном случае. Далее зададим δ — малое отклонение начального положения траектории от гиперболической точки и найдем решение в первом порядке малости по $(\varepsilon_w)^{1/2}$. В соответствии с процедурой из [7] условием пересечения траекторией оси Oy будет ограничение

$$\delta_{cr} \approx \frac{1}{W_0} \sqrt{2(W_0 r_{2s} + a_2 r_{2s} K_0(r_{2s})) \int_{r_0}^{r_2} F(\xi) d\xi} \quad (3)$$

в нижнем слое и

$$\delta_{cr} \approx \frac{1}{r_{2s} K_0(r_{2s}) - W_0} \sqrt{\frac{2(1 + r_{2s}^2 K_0'(r_{2s}))}{r_{2s}^2 W_0} \int_{r_0}^{r_2} F(\xi) d\xi}, \quad (4)$$

в верхнем. Здесь

$$F(\xi) = \left(\frac{1}{\xi} + a_i K_1(\xi) \right) \varepsilon_w W(v T_0(\xi)),$$

$$T_0(r) = \int_{r_0}^r \frac{\xi d\xi}{\sqrt{W^2 \xi^2 - (\psi + \ln \xi - a_i K_0(\xi))^2}},$$

а r_{2s} есть координата гиперболической точки в невозмущенном случае. Сравнение коэффициентов в (3) и (4) показывает, что степень хаотизации в верхнем слое выше и именно стратификация, регулизирующая поле скоростей, приводит к такому эффекту. Отметим, что полученные оценки совпадают с оценками, полученными с помощью мельниковского интеграла, с учетом топологии лоб (областей, ограниченных устойчивым и неустойчивым многообразиями гиперболической точки) [8].

Численные расчеты проводились для возмущения вида $W = W_0 + \varepsilon_w W_0 \sin(vt)$. Сравнение толщины стохастического слоя δ_{cr} в зависимости от амплитуды возмущения, рассчитанное по формуле (3) (пунктирные линии) и прямым моделированием траекторий (сплошные линии), проведенное для нижнего слоя, приведено на рис. 1 (для верхнего слоя можно получить аналогичный рисунок, используя формулу (4)). Из сравнения расчетов и оценок видно, что при малых частотах возмущения оценки неприменимы. При больших и промежуточных частотах оценки остаются применимыми, хотя и при достаточно малых амплитудах возмущения. Здесь нужно учитывать, что при выводе (3), (4) малым параметром является $\varepsilon_w^{1/2}$ [2,10]. Эти расчеты подтверждают известный факт, что роль малого параметра при оценке стохастического слоя играет отношение ε_w/v [9]. Второй эффект состоит в ступенчатом характере изменения толщины стохастического слоя с ростом амплитуды возмущения. Этот эффект легко объяснить: дело в том, что оценки по теории Мельникова [8] предсказывают только огибающую стохастического слоя, а выносятся траектории, имеющие начальное положение во внешних лепестках гомоклинической структуры [8]. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 2, на котором представлены два

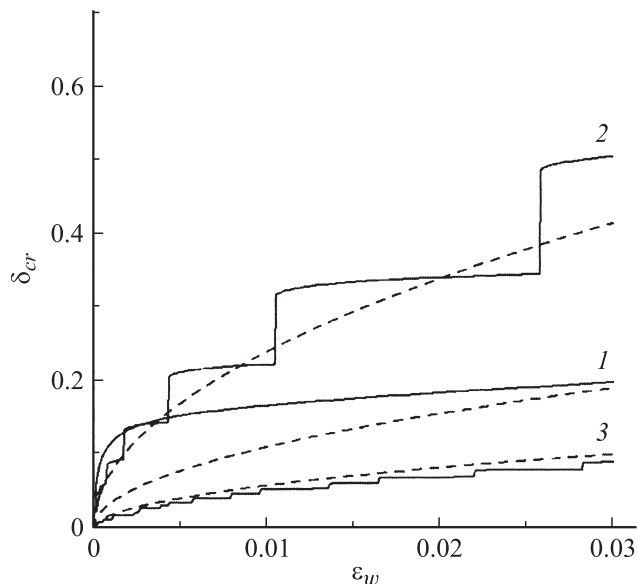


Рис. 1. Теоретическая — по формуле (3) (штрихпунктирная) линия и численная — по уравнению (2) (сплошная) линия, граница выхода траекторий из области вихря в нижнем слое. 1 — $\nu = 0.15$, 2 — $\nu = 1.3$ (оптимальная), 3 — $\nu = 4.4$.

увеличенных фрагмента сечений Пуанкаре при частоте 1.3 и при амплитудах возмущения 0.0250 (*a*) и 0.0290 (*b*). На этом рисунке помечены начальные положения траекторий, покидающих вихревую область за один оборот (точки *A* и *B*) и показывающих границу стохастического слоя, а также показаны участки устойчивого и неустойчивого многообразий, пересечение которых осью $x = 0$ и соответствует границе слоя. Видно, что указанная траектория находится внутри внешнего лепестка (первый фрагмент, точка *A*), а по мере увеличения амплитуды возмущения следующий лепесток увеличивается, и в момент, когда он пересечет ось $x = 0$, толщина слоя увеличится скачком (второй фрагмент, точка *B*). Величина скачка как раз и равна расстоянию между точками *A* и *B*. Ниже последней, покидающей вихревую область за один оборот, траектории есть внутренние лепестки, т.е. слой имеет дискретную структуру, часть траекторий покидает вихревую область за

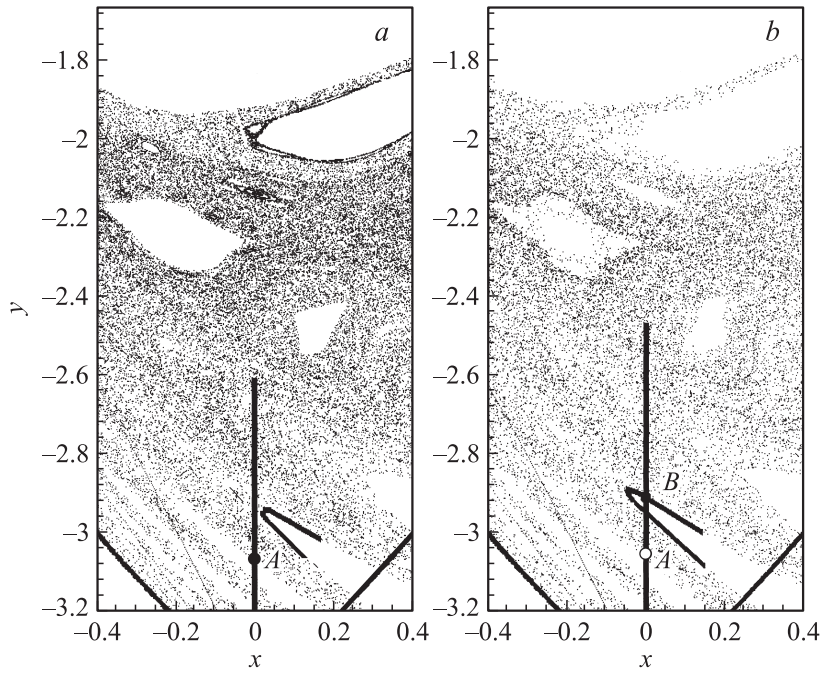


Рис. 2. Сечения Пуанкаре, нижний слой, частота возмущения $\nu = 1.3$, амплитуды возмущения: a — $\varepsilon_w = 0.025$, b — $\varepsilon_w = 0.0290$. Схематично показан фрагмент пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий (лепестков).

один оборот, часть нет. Именно скачкообразное изменение толщины слоя объясняет неприменимость наших оценок при малых частотах. Дело в том, что при малой частоте возмущения размеры лепестка очень велики, а толщина стохастического слоя определяется топологией лепестка, а не его размерами, которые и предсказывает теория возмущений. При немалых частотах лепестки, определяющие толщину слоя, оказываются достаточно малыми и отклонение оценок от расчетов по указанной причине не так велико. Тем не менее из наших расчетов видно, что оценки по мельниковской теории практически позволяют установить только сам факт наличия стохастического слоя и возможно качественное изменение его ширины с частотой, а для количественного анализа совершенно непригодны.

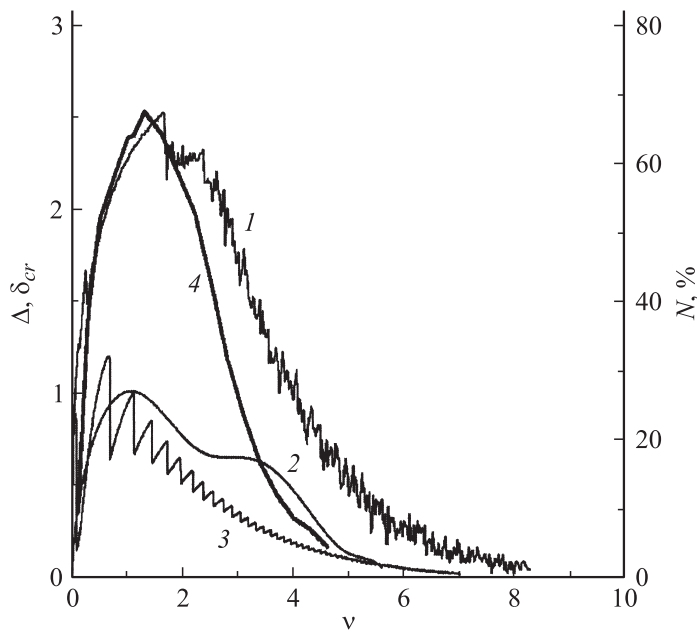


Рис. 3. Ширина стохастического слоя в зависимости от частоты возмущения (амплитуда возмущения $\varepsilon_w = 0.1$) в нижнем слое. 1 — полный слой, 2 — аналитическая оценка, 3 — вынос за один оборот, 4 — степень выноса маркеров как функция частоты возмущения.

При достаточно малых амплитудах возмущения, но таких, при которых мельниковская теория уже не работает, также можно ввести понятие толщины стохастического слоя. При этом приходится учитывать траектории, покидающие вихревую область не за один оборот, а границей слоя служит положение ближайшей к гиперболической точке траектории, никогда не покидающей вихревую область (граница выноса, определяемая за большое количество периодов, показана на рис. 3, линия 1). Определенную таким образом толщину стохастического слоя Δ в некоторых случаях удастся определить с помощью критерия перекрытия резонансов или методом сепаратрисного отображения [9]. На рис. 3 приведены расчеты определенной таким образом толщины слоя стохастизации в зависимости от частоты возмущения.

На этом рисунке мы видим, что оценка (3) (для (4) наблюдается аналогичная картина) достаточно хорошо качественно (но не количественно) описывает полную толщину стохастического слоя при малых и больших частотах. В окрестности оптимальной для хаотизации частоты возмущения отличия существенные. Тем не менее частотная зависимость толщины стохастического слоя годится для грубой оценки интервала оптимальных для хаоса частот [4,5]. Для подтверждения последнего вывода на рис. 3 также приведена степень хаотизации вихревой области $N(\nu)$, вычисленная, как доля вымытых маркеров из 10^4 , изначально равномерно расположенных в вихревой области [7].

Существенной особенностью полной толщины слоя Δ является ее изрезанность при высоких частотах. Этот эффект объясняется фрактальным характером распределения нелинейных резонансов в окрестности границы стохастического слоя и будет обсужден в более подробной работе. Отметим также, что зависимость степени выноса от частоты кроме сильной изрезанности на больших частотах возмущения имеет локальные максимумы и минимумы, которые достаточно хорошо коррелируют с такими же структурами на толщине слоя, определяемой по траектории, вынесенной за один оборот. При больших возмущениях такой корреляции не наблюдается. Еще один существенный факт состоит в том, что зависимость ширины нелинейных резонансов от амплитуды возмущения и частоты, по-видимому, имеет тот же характер, что и оценка (3), (4) при относительно малых частотах. При больших частотах основной вклад дают нелинейные резонансы высоких порядков [10], поэтому характер убывания толщины слоя, вычисленной по формулам (3), (4), степенной, а не экспоненциальный [9]. На рис. 3 видно, что при больших частотах толщина слоя, вычисленная прямым моделированием, убывает быстрее, чем оценки.

Таким образом, показано, что толщина стохастического слоя в окрестности гиперболической точки, с ростом амплитуды, меняется скачками, что объяснено топологией областей, ограниченных устойчивым и неустойчивым многообразием; с увеличением амплитуды возмущения все более удаленные от гиперболической точки области многообразий начинают пересекаться, тем самым определяя толщину стохастического слоя. Также показано, что оценки по теории возмущений можно использовать для определения интервала оптимальных для хаотизации частот нестационарного возмущения, хотя они не дают количественных оценок толщины слоя. Таким образом, мы показали, что стохастический слой вихревых структур имеет более сложный

характер зависимости от параметров возмущения, чем предсказывает мельниковская теория. Как оценки, так и численное моделирование показывают, что стратификация приводит к более эффективному перемешиванию вследствие регуляризации поля скорости в окрестности эллиптической точки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 06-05-96080-р_восток_a, 07-05-92210-НЦНИЛ_a и 08-05-00061-а).

Список литературы

- [1] *Козлов В.Ф.* // Изв. РАН. ФАО. 1995. Т. 31. № 2. С. 245–250.
- [2] *Кошель К.В., Пранц С.В.* // Успехи физических наук. 2006. Т. 176. № 11. С. 1177–1206.
- [3] *Aref H.* // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1990. V. 333. N 1631. P. 73–288.
- [4] *Кошель К.В., Степанов Д.В.* // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2. № 2. С. 147–164.
- [5] *Кошель К.В., Степанов Д.В.* // Докл. АН. 2006. Т. 407. № 4. С. 542–546.
- [6] *Гледзер А.Е.* // Изв. РАН. ФАО. 1999. Т. 35. № 6. С. 838–845.
- [7] *Козлов В.Ф., Кошель К.В., Степанов Д.В.* // Изв. РАН. ФАО. 2005. Т. 41. № 2. С. 99–109.
- [8] *Rot-Kedar V., Poje A.C.* // Phys. Fluids. 1999. V. 11. N 8. P. 2044–2057.
- [9] *Заславский Г.М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 286 с.
- [10] *Кошель К.В., Степанов Д.В., Израильский Ю.Г.* // Докл. АН. 2006. Т. 407. № 6. С. 733–736.