

01;06

Граничные (минимальное и максимальное) значения эффективной проводимости в условиях квантового эффекта Холла

© В.Е. Архинчеев

Бурятский научный центр СО РАН, Улан-Удэ
E-mail: varkhin@mail.ru

Поступило в Редакцию 2 июля 2007 г.

Рассмотрено протекание тока в неоднородных средах в условиях квантового эффекта Холла. Установлены нижняя и верхняя границы для эффективной холловской проводимости, значения которых отличаются от граничных значений для металлической проводимости.

PACS: 73.43.-f, 72.10.Bg, 72.15.Gd

1. При исследовании протекания тока в неоднородных средах одной из основных проблем является проблема вычисления эффективной проводимости σ_e , которая определяется как коэффициент пропорциональности между средними значениями электрического тока $\mathbf{J} = \langle \mathbf{j} \rangle$ и электрического поля $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle$: $\mathbf{J} = \sigma_e \mathbf{E}$. В двумерном случае благодаря дуальной симметрии уравнений постоянного тока были получены точные результаты для эффективной проводимости двухфазных сред на пороге протекания (равных концентрациях фаз) [1,2]:

$$\sigma_e(0) = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}. \quad (1)$$

В общем случае получены граничные значения для эффективной проводимости:

$$\left\langle \frac{1}{\sigma} \right\rangle^{-1} \leq \sigma_e \leq \langle \sigma \rangle. \quad (2)$$

Здесь $\langle \sigma \rangle$ означает среднее значение величины σ . Для установления граничных значений для эффективной проводимости было рассмотрено выражение для джоулева тепла [3]:

$$Q = \frac{1}{V} \int (\mathbf{j}, \mathbf{e}) dV = (\mathbf{J}, \mathbf{E}) = \sigma_e \mathbf{E}^2. \quad (3)$$

Если подставить в подынтегральное выражение формулы (3) вместо локального электрического тока его среднее значение, то получим нижнюю границу формулы (2). А если вместо локального электрического поля подставить среднее значение для поля, то получим верхнюю границу формулы (2). Уточнения полученных границ связаны с дальнейшими предположениями о симметрии задач [4]. Однако эти рассуждения не применимы для исследования вопроса о нижней и верхней границах для холловской проводимости в неоднородной двумерной среде в условиях квантового эффекта Холла (КЭХ): $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = \text{const}$. В режиме КЭХ электрический ток всегда перпендикулярен электрическому полю: $\mathbf{j} = \sigma_{xy} [\mathbf{n}, \mathbf{e}]$ (здесь \mathbf{n} — единичный вектор, направленный перпендикулярно двумерной плоскости по магнитному полю), поэтому джоулево тепло при протекании тока в режиме КЭХ всегда равно нулю: $Q = 0$. Следовательно, вопрос о границах для значений холловской проводимости в условиях КЭХ не может быть исследован описанным выше способом. Кроме того, из обычных граничных условий непрерывности тангенциальных компонент электрического поля $e_{1t} = e_{2t}$ и нормальных компонент электрического тока $j_{1n} = j_{2n}$ при протекании тока в режиме КЭХ вытекают новые граничные условия:

$$j_{1n} = j_{2n} = 0. \quad (4)$$

Другими словами, холловский ток не может перескочить границу раздела фаз и всегда обтекает неоднородности, быть может, за исключением конечного числа сингулярных точек. Соответственно, на первый взгляд кажется, что холловская проводимость в гетерофазных средах всегда должна обращаться в ноль. Если же нет, то возникает вопрос — каким образом формируется ненулевая холловская проводимость? Целью настоящей работы является исследование протекания тока в условиях КЭХ и установление нижней и верхней границ для холловской проводимости в режиме КЭХ.

2. Вначале исследуем протекание тока в условиях КЭХ в слоистых средах с различными холловскими проводимостями $\sigma_{xy}^{(1)}$ и $\sigma_{xy}^{(2)}$. Рассмотрим случай, когда электрический ток течет перпендикулярно границам раздела фаз. В условиях КЭХ при таком направлении тока электрическое поле направлено вдоль слоев и равняется среднему значению $E_x = \langle \mathbf{e} \rangle_x$ согласно граничным условиям непрерывности тангенциальных компонент. Поэтому

$$\sigma_{xy}^e = \frac{1}{2} (\sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)}). \quad (5)$$

Таким образом, значение эффективной холловской проводимости (5) соответствует решению с постоянным электрическим полем. Далее рассмотрим протекание тока вдоль слоев и будем искать решение с постоянным электрическим током. Тогда после усреднения токов получим выражение для холловской проводимости:

$$\sigma_{yx}^e = \frac{2\sigma_{xy}^{(1)}\sigma_{xy}^{(2)}}{\sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{xy}^{(2)}}. \quad (6)$$

Для проверки этих результатов вычислим распределения электрических полей и токов в слоистых средах в режиме КЭХ. Используя определенные средних величин:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{e} \rangle_1 + \langle \mathbf{e} \rangle_2 = \mathbf{E}, \\ \sigma_{xy}^{(1)} \langle [\mathbf{n}, \mathbf{e}] \rangle_1 + \sigma_{xy}^{(2)} \langle [\mathbf{n}, \mathbf{e}] \rangle_2 = \sigma_{xy}^e [\mathbf{n}, \mathbf{E}], \end{cases} \quad (7)$$

получим формулы, описывающие распределения электрических полей в фазах:

$$\langle \mathbf{e} \rangle_1 = \mathbf{E} \frac{\sigma_{xy}^e - \sigma_{xy}^{(2)}}{\sigma_{xy}^{(1)} - \sigma_{xy}^{(2)}}, \quad \langle \mathbf{e} \rangle_2 = \mathbf{E} \frac{\sigma_{xy}^e - \sigma_{xy}^{(1)}}{\sigma_{xy}^{(1)} - \sigma_{xy}^{(2)}}. \quad (8)$$

Подставляя формулы (5) или (6) в выражения (8), легко проверить, что полученное решение (5) действительно соответствует решению с постоянным электрическим полем, а решение (6) соответствует решению с постоянным электрическим током. Таким образом, холловская проводимость в слоистых средах носит тензорный характер и компоненты тензора холловской проводимости не равны друг другу: $\sigma_{xy}^e \neq \sigma_{yx}^e$. Это связано с тем, что в системе есть выделенное направление вдоль слоев.

2. Для исследования проблемы нижней и верхней границ для холловской проводимости в общем случае неоднородных сред рассмотрим двумерную двухфазную среду со случайным расположением фаз. (Частным случаем являются среды с регулярной структурой типа „шахматной доски“). Напомним коротко ранее установленные основные результаты [2,5–7]. Двухмерная проводящая среда описывается уравнениями постоянного тока и законом Ома:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0. \quad (9)$$

Согласно Дыхне [2], эти уравнения инвариантны относительно уравнений поворота:

$$\mathbf{j} = a\mathbf{j}' + b[\mathbf{n}, \mathbf{e}], \quad \mathbf{e} = b\mathbf{e}' + d[\mathbf{n}, \mathbf{j}']. \quad (10)$$

Здесь a, b, c, d — постоянные коэффициенты уравнений поворота. В магнитном поле \mathbf{B} , направленном перпендикулярно плоскости, закон Ома имеет тензорный вид: $\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{e}$. В силу линейности указанных преобразований в новой штрихованной системе закон Ома также имеет тензорный вид. При этом компоненты тензора новой штрихованной системы связаны с компонентами тензора исходной системы соотношениями:

$$\sigma'_{xx} = \frac{\sigma_{xx}(ac + bd)}{(\sigma_{xx}d)^2 + (\sigma_{xy}d + a)^2}, \quad \sigma'_{xy} = \frac{\sigma_{xx}^2 cd + (c\sigma_{xy} - b)(d\sigma_{xy} - a)}{(\sigma_{xx}d)^2 + (\sigma_{xy}d + a)^2}.$$

Далее найдем возможные преобразования симметрии для изучаемой двухфазной системы. Можно указать, по крайней мере, три таких преобразования [2,4]:

1) преобразование в систему, при котором переставляются фазы местами $1 \leftrightarrow 2$:

$$\hat{\sigma}'_1 = \hat{\sigma}_2, \quad \hat{\sigma}'_2 = \hat{\sigma}_1;$$

2) преобразование в систему как с перестановкой фаз местами, так и изменением направления магнитного поля $1 \leftrightarrow 2, H \leftrightarrow -H$: $\sigma'_{1xx} = \sigma_{2xx}, \sigma'_{2xx} = \sigma_{1xx}, \sigma'_{xy} = -\sigma_{xy}$;

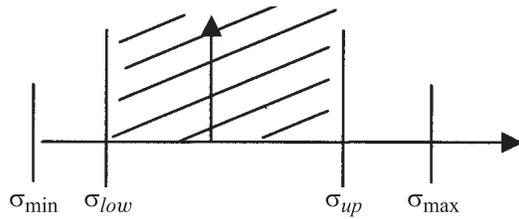
3) преобразование в систему, отличающуюся только направлением магнитного поля:

$$H \leftrightarrow -H : \sigma'_{xx} = \sigma_{xx}, \quad \sigma'_{xy} = -\sigma_{xy}.$$

Рассмотрим подробнее третье преобразование. В этом случае получается общее соотношение, связывающее компоненты тензора при произвольных концентрациях фаз, полученное впервые в [2]:

$$[(\sigma_{xx}^e)^2 + (\sigma_{xy}^e)^2]cd + \sigma_{xy}^e(ac - bd) - ab = 0. \quad (11)$$

Далее сделаем предельный переход к режиму КЭХ в соотношении (11). Диагональная компонента эффективного тензора проводимости равна нулю: $\sigma_{xx}^e(\varepsilon) = 0$ (см. также [8]). Нетрудно вычислить из (11), что



Заштрихованная область значений соответствует области разрешенных значений для металлической проводимости (слоистых сред), незаштрихованная область соответствует большой области возможных значений для холловской проводимости. Здесь σ_{low} , σ_{up} — значения нижней и верхней границ для металлической проводимости, σ_{min} , σ_{max} — граничные значения для холловской проводимости.

эффективная холловская проводимость всей системы постоянна и равна значению проводимости или первой, или второй фазы:

$$\sigma_{xy}^e = \begin{cases} \sigma_{xy}^{(1)} \\ \sigma_{xy}^{(2)} \end{cases}. \quad (12)$$

Как следует из (12), эффективная холловская проводимость в режиме КЭХ имеет постоянное значение — плато, не зависящее от концентрации фаз. Высота плато меняется скачком на пороге протекания. Таким образом, получаем следующие оценки для нижней и верхней границ значений холловской проводимости:

$$\min(\sigma_{xy}^{(1)}, \sigma_{xy}^{(2)}) \leq \sigma_{xy}^e \leq \max(\sigma_{xy}^{(1)}, \sigma_{xy}^{(2)}). \quad (13)$$

Полученные оценки шире установленных ранее для слоистых сред или для металлической проводимости (см. также рисунок). Эти результаты для нижней и верхней границ значений холловской проводимости связаны с необычным характером протекания тока в режиме квантового эффекта Холла. В этом режиме из уравнения $\text{div } \mathbf{j} = 0$ и потенциальности электрического поля $\text{curl } \mathbf{e} = 0$ следует:

$$\mathbf{e} \times \nabla \sigma_{xy} = 0, \quad (14)$$

т.е. линии тока никогда не пересекают линий постоянных значений величины σ_{xy} [9]. Другими словами, холловский ток течет вдоль

линий неоднородностей холловской проводимости, не пересекая границ раздела фаз, и „замораживается“ в каждой из фаз. Это объясняет и само постоянство (плато) значений холловской фазы при изменении концентраций фаз. Кроме того, значения плато определяются проводимостью той перколирующей фазы, которая образует бесконечный перколяционный кластер, т. е. значение плато определяется топологией токовых путей.

Список литературы

- [1] *Keller J.B.* // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 548.
- [2] *Дыхне А.М.* // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 110; 641.
- [3] *Дыхне А.М.* // ЖЭТФ. 1967. Т. 52. С. 264.
- [4] *Фокш А.Г.* // УФН. 1996. Т. 166б. В. 10. С. 1069.
- [5] *Балагуров Б.Я.* // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 665; ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 1333.
- [6] *Емец Ю.П.* Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. Киев: Наук. думка, 1986. 191 с.
- [7] *Arkhincheev V.E.* // Physica Status Solidi. 1990. V. 161. P. 815.
- [8] *Архинчев В.Е., Батыев Э.Г.* // Sol. St. Comm. 1989. V. 12. P. 1059.
- [9] *Dykhne A.M., Ruzin I.M.* // Physical Review B. 1994. V. 50. P. 2369.