03;08

Расщепление резонансных частот акустических волн во вращающейся сжимаемой жидкости (газе)

© *А.А. Сокольский, А.Н. Тарасенко*

Белорусский государственный университет, Минск
E-mail: sokolan@tut.by

Поступило в Редакцию 1 апреля 2007 г.
В окончательной редакции 18 июля 2007 г.

Показано, что во вращающейся сжимаемой среде (газе, жидкости), ограниченной цилиндрическими стенками, резонансные частоты акустических волн, распространяющихся в направлении вращения среды и против него, расщепляются на две компоненты. Рассчитана величина такого расщепления для экспериментально реализуемого случая. Результаты представляют интерес для акустики вращающихся технических устройств, а также для измерения скорости вращения сред.

PACS: 43.20.Ks

В связи с актуальностью проблемы учета акустических воздействий на технологические процессы в быстровращающихся технических устройствах интерес к изучению влияния вращения на волновые явления в сжимаемых средах непрерывно растет [1]. В настоящей работе показано, что в ограниченной цилиндрическими стенками вращающейся сжимаемой жидкости (газе) резонансные частоты акустических волн, распространяющихся в направлении вращения среды и против него, расщепляются на две компоненты. Речь идет не об эффекте Доплера, а о том, что расщепление имеет место и для частот, измеренных в системе отсчета, вращающейся вместе со средой, в которой на фоне установившегося равновесного состояния возбуждены собственные колебания, носящие характер бегущих в азимутальном направлении волн.

Как известно, в невращающейся сжимаемой жидкости (газе), находящейся между двумя жесткими коаксиальными цилиндрическими стенками, возможны собственные колебания, имеющие характер кольцевых волн, двух типов [2]. Это либо полностью стоячие волны, либо стоячие в радиальном направлении, но бегущие в азимутальном (последние будем называть просто бегущими).

Запишем уравнения линейной акустики невязкой жидкости (газа):

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = -\nabla \tilde{p}, \quad \dot{\tilde{p}} = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{v}, \tag{1}$$

где p_0 — давление, ρ_0 — плотность, c_0 — скорость звука для равновесного состояния, $\tilde{p} = p - p_0$ — звуковое давление, точка над буквой — частное дифференцирование по времени, $\mathbf{v}$ — скорость элемента среды. С помощью (1) легко показать, что при колебаниях, для которых $v_z \equiv 0$, звуковое давление $\tilde{p}(r, \varphi, t)$ для стоячих волн описывается выражением вида $P_m(r) \cos m\varphi \cos \omega_{mn} t$, а для бегущих — вида $P_m(r) \cos(m\varphi - \omega_{mn} t)$. Здесь и далее $P_m(r) = AJ_m(\omega_{mn} r/c_0) + BY_m(\omega_{mn} r/c_0)$, A и B — постоянные, J_m и Y_m — функции Бесселя [3], m и n — целые числа; r, φ, z — цилиндрические координаты. Резонансные частоты ω_{mn} могут быть найдены из уравнения

$$J'_m(\omega R_1/c_0) Y'_m(\omega R_2/c_0) = J'_m(\omega R_2/c_0) Y'_m(\omega R_1/c_0), \tag{2}$$

которое является следствием граничных условий $v_r = 0$ при $r = R_{1,2}$, где R_1 и R_2 — радиусы коаксиальных цилиндрических стенок, $J'_m(x) = dJ_m/dx$, $Y'_m(x) = dY_m/dx$. Наборы ω_{mn} для бегущих и стоячих волн одинаковы и не зависят от знака углового номера m. В результате, каждую стоячую кольцевую волну можно рассматривать как суперпозицию двух бегущих навстречу волн, а бегущую — как наложение двух стоячих, с разностью фаз $\pi/2$.

Проведем аналогичное рассмотрение для кольцевых волн во вращающейся среде. В системе отсчета Σ, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, для гидродинамических процессов, в которых вязкостью и теплопроводностью можно пренебречь, выполняется:

$$\dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p + \nabla(\Omega^2 r^2/2) + 2[\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}],$$

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \dot{p} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = c^2(\dot{\rho} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho), \tag{3}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость элемента среды относительно Σ, r — расстояние от оси вращения. Наложим ограничения на угловую скорость Ω вращения среды $M = \Omega r_{\max}/c \ll 1$ и на амплитуду v_A скорости колебаний $v_A/c < M^2$. Тогда из уравнений (3) для адиабатных отклонений от равновесного состояния вращающейся среды вместо (1) получится:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\rho_0^{-1}\nabla\tilde{p} + 2[\mathbf{v}\times\boldsymbol{\Omega}], \tag{4}$$

$$\dot{\tilde{p}} = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{5}$$

Отметим, что при вычислении поправок первого порядка по M, обусловленных влиянием вращения среды на колебания, в уравнениях (4), (5) параметры p_0, ρ_0 и c_0 можно считать постоянными. Существенно также, что для резонансных частот ω_{mn} рассматриваемых волн выполняется неравенство $\Omega/\omega_{mn} < M$. Легко проверить, что как для газов, так и для жидкостей система (4), (5) применима, например, для частот вращения $1-10\,\mathrm{s}^{-1}$ при радиальных размерах области $0.2-0.5\,\mathrm{m}$ и амплитудах скорости $v_A/c \sim 10^{-5}$.

Исключая скорость $\mathbf{v}$ из (4), (5) и опуская слагаемые порядка $(\Omega/\omega)^2$, можно убедиться, что акустическое давление $\tilde{p}(r,\varphi,t)$ в рассматриваемом приближении удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и при отсутствии вращения:

$$\ddot{\tilde{p}} = c_0^2\nabla^2\tilde{p}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6}$$

Для бегущей в азимутальном направлении гармоники углового номера $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ звуковое давление $\tilde{p}(r,\varphi,t)$ при $\Omega \neq 0$ (как и при $\Omega = 0$) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\tilde{p}(r,\varphi,t) &= P_m(r)\cos(m\varphi - \omega t)\\ &= \left[AJ_m(\omega r/c_0) + BY_m(\omega r/c_0)\right]\cos(m\varphi - \omega t).\end{aligned} \tag{7}$$

В этом же приближении, в силу (4), радиальная компонента скорости v_r приобретает добавку порядка Ω/ω, вследствие чего для бегущей волны

$$v_r = \frac{1}{\rho_0\omega}\left(\frac{dP_m}{dr} - \frac{2m\Omega}{\omega r}P_m\right)\sin(m\varphi - \omega t). \tag{8}$$

Из (8) и граничных условий $v_r = 0$ при $r = R_{1,2}$, вместо (2), получаем:

$$\frac{J_m'(\omega R_1/c_0) - \frac{2mc_0\Omega}{\omega^2 R_1}J_m(\omega R_1/c_0)}{J_m'(\omega R_2/c_0) - \frac{2mc_0\Omega}{\omega^2 R_2}J_m(\omega R_2/c_0)} = \frac{Y_m'(\omega R_1/c_0) - \frac{2mc_0\Omega}{\omega^2 R_1}Y_m(\omega R_1/c_0)}{Y_m'(\omega R_2/c_0) - \frac{2mc_0\Omega}{\omega^2 R_2}Y_m(\omega R_2/c_0)}. \tag{9}$$

Значения параметра ω, при которых выполняется (9), образуют наборы резонансных частот бегущих кольцевых волн — как несмещенных ω_{mn}

Таблица 1. Несмещенные частоты ν_{mn} (Hz) и отклонения от них $\Delta\nu_{mn}^{\pm} = \nu_{mn}^{\pm} - \nu_{mn}$ (Hz)

m	n	1		2		3		4		5	
1	ν_{mn}	153.55		594.45		1122.19		1664.72		2211.01	
	$\Delta\nu_{mn}^{\pm}$	−3.91	1.32	1.41	−1.44	0.43	−0.43	0.20	−0.20	0.11	−0.11
2	ν_{mn}	298.57		673.95		1161.34		1690.30		2230.04	
	$\Delta\nu_{mn}^{\pm}$	−5.24	4.06	2.29	−2.39	0.86	−0.87	0.40	−0.40	0.23	−0.23
3	ν_{mn}	431.53		791.52		1225.43		1732.52		2261.55	
	$\Delta\nu_{mn}^{\pm}$	−6.12	5.43	2.25	−2.40	1.27	−1.29	0.60	−0.61	0.34	−0.34

при $\Omega = 0$, так и смещенных ω_{mn}^{+} при $m\Omega > 0$ (т.е. для волн, распространяющихся в направлении вращения среды) и ω_{mn}^{-} при $m\Omega < 0$.

Значения частот $\nu_{mn} = \omega_{mn}/(2\pi)$ и отклонений от них $\Delta\nu_{mn}^{\pm} = \nu_{mn}^{\pm} - \nu_{mn}$, где $\nu_{mn}^{\pm} = \omega_{mn}^{\pm}/(2\pi)$, найденные путем численного решения (9) при $R_1 = 0.2m$, $R_2 = 0.5m$, $\Omega = \pm 2\pi N$, $N = 10\,\mathrm{s}^{-1}$, $c_0 = 330\,\mathrm{m/s}$, приведены в табл. 1 (для $m = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \ldots, 5$).

Для вращающейся жидкости (газа) в цилиндре радиусом R (т.е. при $R_1 = 0$, $R_2 = R$) функция $P_m(r)$ сводится к $AJ_m(\omega r/c_0)$, и для отклонений $\Delta\omega_{mn}$ резонансных частот от их несмещенных значений ω_{mn} можно получить приближенное соотношение:

$$\omega_{mn} + \Delta\omega_{mn} = \frac{c_0}{R} X_{mn} - \frac{2m\Omega}{X_{mn}^2 - m^2}, \tag{10}$$

где X_{mn} — корни уравнения $J_m'(x) = 0$. Согласно (10), отношение расщепления частот к угловой скорости среды для этого случая имеет универсальный характер:

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}^{+} - \omega_{mn}^{-}}{\Omega} = -\frac{4m}{X_{mn}^2 - m^2}. \tag{11}$$

Значения корней X_{mn} и „коэффициентов расщепления“ f_{mn} для $m = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \ldots, 5$ приведены в табл. 2

Данные таблиц 1 и 2 говорят о том, что экспериментальное обнаружение описанного в настоящей работе эффекта сдвига частот во вращающемся газе (жидкости) не должно встретить затруднений.

Таблица 2. Значения корней X_{mn} и „коэффициентов расщепления“ f_{mn}

m	n	1	2	3	4	5
1	X_{mn}	1.841	5.331	8.536	11.706	14.864
	f_{mn}	−1.674	−0.146	−0.056	−0.029	−0.018
2	X_{mn}	3.054	6.706	9.969	13.170	16.348
	f_{mn}	−1.501	−0.195	−0.084	−0.047	−0.030
3	X_{mn}	4.201	8.015	11.346	14.586	17.789
	f_{mn}	−1.387	−0.217	−0.100	−0.059	−0.039

Поскольку частоты волн, распространяющихся в направлении вращения среды и против него, не равны между собой, никакая суперпозиция таких волн не может быть стоячей волной. При наложении двух бегущих волн противоположных направлений получатся биения, которые будут двигаться в азимутальном направлении с угловой скоростью, имеющей относительно вращающейся среды величину $\Omega_{mn}^{rel} = (\omega_{mn}^{+} - \omega_{mn}^{-})/(2m)$. При $\Omega \to 0$ такие решения переходят в стоячие волны.

Физической причиной, вызывающей расщепление частот бегущих волн и обусловливающей отсутствие стоячих при $m\Omega \neq 0$, является сила Кориолиса. Она создает добавку Δv_r к радиальной компоненте скорости v_r порядка Ω/ω, знак которой зависит от направления распространения бегущей волны по отношению к направлению вращения среды. Такая добавка для бегущих волн находится в фазе с исходными колебаниями (см. (8)), а для стоячих — это не имеет места. Действительно, как легко показать с помощью (4), добавка Δv_r к радиальной скорости

$$v_r = -\frac{1}{\rho_0 \omega} \frac{dP_m}{dr} \cos m\varphi \sin \omega t$$

исходной стоячей волны равна

$$\Delta v_r = -\frac{2m\Omega}{\rho_0 \omega^2 r} P_m \sin m\varphi \cos \omega t.$$

В результате для бегущих волн граничные условия на стенках могут быть выполнены (и выполняются при соответствующих поправках к частоте), а для стоячих это невозможно.

Расщепление собственных частот упругих кольцевых волн во вращающейся жидкости (газе) можно считать гидродинамическим аналогом эффекта Саньяка [4], но лишь с весьма существенными оговорками, связанными с различиями в природе явлений и способах наблюдений этих эффектов. Важно, однако, что в обоих случаях эффекты позволяют обнаружить вращение объекта относительно инерциальной системы отсчета по измерениям, производимым не выходя за пределы системы отсчета, вращающейся вместе с объектом.

При значениях параметров $M = \Omega R/c$ и v_A/c существенно бóльших, чем рассмотренные, необходим учет нелинейных членов и коррекция полученных результатов. Следует, однако, ожидать, что, по крайней мере при слабом влиянии нелинейности и вязкости, эффект расщепления частот будет иметь характер, близкий к описанному выше, и что нелинейный отклик среды может проявиться на частотах биений.

Список литературы

[1] *Ерофеев В.И., Солдатов И.Н.* // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 5. С. 644–649.
[2] *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. С. 271.
[3] *Справочник* по специальным функциям / Ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.
[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. С. 326.