

01;09

## Управляемая хаотическая система с запаздыванием

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники РАН (Фрязинский филиал)  
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 4 июня 2007 г.

Предложена хаотическая автоколебательная система, основанная на уравнении с запаздыванием, в которой управление колебаниями осуществляется с помощью алгоритма хаотизирующей обратной связи. Приведены результаты численного анализа.

PACS: 05.45.-a

Среди относительно большого разнообразия систем с хаотической динамикой особое место занимают высокоразмерные автоколебательные системы с запаздыванием, в которых наряду с регулярными режимами реализуются режимы гиперхаоса. Одна из широко известных моделей автоколебательной системы с запаздывающим аргументом описывается нелинейным дифференциально-разностным уравнением первого порядка

$$\delta dx/dt + x = F(x_\tau), \quad (1)$$

где  $x = x(t)$ ,  $x_\tau = x(t - \tau)$ ,  $\tau$  — запаздывание,  $\delta$  — параметр инерционности,  $F(x_\tau)$  — нелинейная функция.

При аппроксимации нелинейности с помощью выражения

$$F(x_\tau) = B x_\tau (1 + x_\tau^n)^{-1}, \quad (2)$$

где  $B, n$  — постоянные коэффициенты, уравнение типа (1) получено в работе [1] для описания регуляции образования кровяных клеток у человека, а при нелинейной характеристике, определяемой синусоидальной функцией

$$F(x_\tau) = B \sin(x_\tau - \alpha), \quad (3)$$

где  $\alpha$  — постоянная, предложено в работе [2] при описании процессов в кольцевом оптическом резонаторе. Известно использование также

и других формул для аппроксимации нелинейности в уравнении (1). Удобным является выражение, отображающее соотношение Рэлея, которое представлено в [3]

$$F(x_\tau) = B x_\tau \exp(-x_\tau^2). \quad (4)$$

Использование в уравнении (1) различных аппроксимаций для нелинейной функции при приблизительно равной крутизне падающего участка не приводит к качественно новым результатам, хотя при численном анализе проявляются количественные различия. При этом по структуре колебаний, как показано в [4,5], несмотря на многомодовость системы (1), ее параметры могут быть восстановлены, и, как следствие, нарушена скрытность передачи информации в случаях использования системы (1) для маскировки. Это продемонстрировано на примерах использования в уравнении (1) соотношений (2) [4] и (3) [5]. На основе результатов этих работ можно ожидать и возможность восстановления параметров уравнения (1) при нелинейности, описываемой выражением (4). Здесь следует заметить, что максимальная крутизна падающего участка характеристики, описываемой соотношением (4), такая же, как и у характеристики, определяемой выражением (2), если  $n = 4$ .

Возможность восстановления параметров уравнения (1) по временному ряду динамической переменной делает целесообразным усложнение самой системы, в том числе и с целью управления колебательным процессом. В данной работе рассматривается возможность управления колебаниями модели, основанной на уравнении (1), при использовании алгоритма дополнительной обратной связи. При этом в качестве нелинейности использовано выражение (4).

Для обеспечения дополнительной обратной связи введем в правую часть уравнения (1) функцию  $f(t)$ , так что с учетом (4), будем иметь

$$\delta dx/dt + x = B x_\tau \exp(-x_\tau^2) + d_0 f(t), \quad (5)$$

где  $d_0$  — коэффициент дополнительной обратной связи.

С помощью функции  $f(t)$  можно создать не только внешнее воздействие, но и „самовоздействие“, если обеспечить ее зависимость от колебательного процесса  $x(t)$ . С целью выполнения нерегулярности этого „самовоздействия“ зададим функцию  $f(t)$  условием

$$f(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{при } x < x_\tau, \\ u_2(t) & \text{при } x > x_\tau, \end{cases} \quad (6)$$

связывая ее с  $x(t)$  через переменные  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , определяемые уравнениями

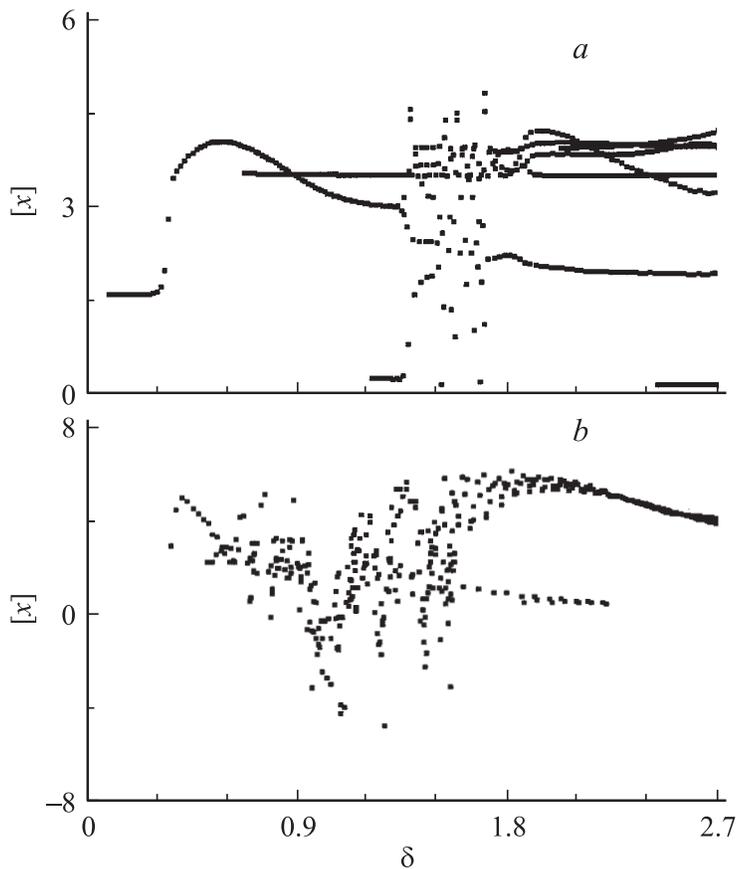
$$d^2u_i/dt^2 + (\omega_i/Q)du_i/dt + \omega_i^2u_i = \omega_i^2\gamma x, \quad (7)$$

где  $i = 1, 2$ ;  $\omega_i, Q, \gamma$  — положительные величины.

Соотношения (5)–(7) описывают рассматриваемую математическую модель системы с автокоммутацией, основанную на нелинейном дифференциально-разностном уравнении, когда обеспечивается переменная дополнительная обратная связь. Представляется, что благодаря приведенному усложнению системы с помощью выражений (6), (7) возникают принципиальные трудности ее восстановления по реализации колебательного процесса методом, предложенным в [4,5]. В то же время оказывается возможным управление колебаниями, что иллюстрируется рис. 1–3.

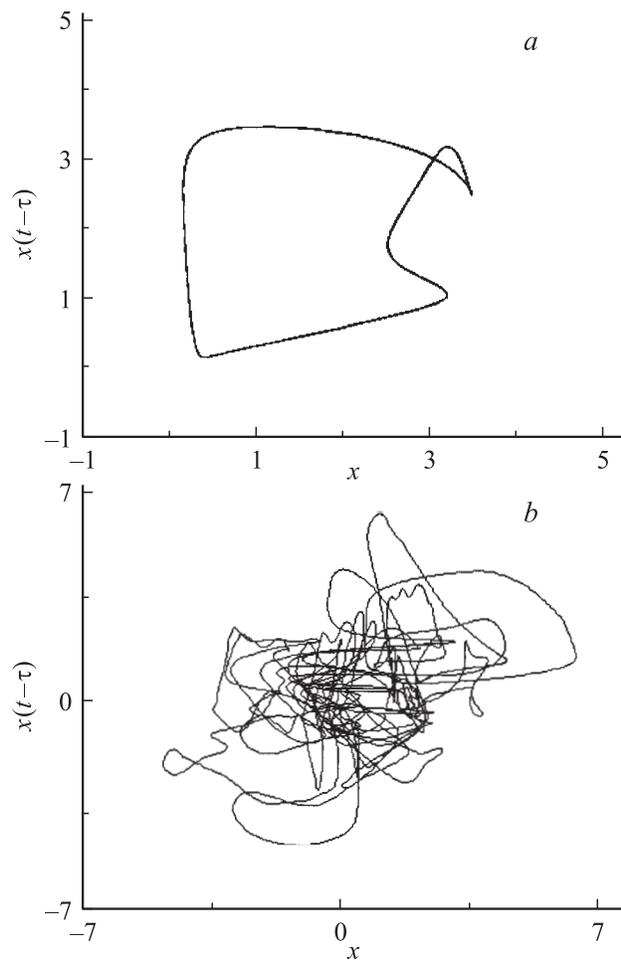
Расчеты проводились методом Рунге–Кутты 4-го порядка при шаге интегрирования, равном 0.02. Неизменяемые параметры имели следующие значения:  $\tau = 3$ ,  $B = 12$ ,  $Q = 100$ ,  $\gamma = 0.4$ . Начальные условия для переменных  $x$  и  $x_\tau$  равны 0.1, а для переменных  $u_i$  — нулю.

На рис. 1 приведены бифуркационные диаграммы, показывающие изменение максимальных значений колебательного процесса  $x(t)$ , обозначенных через  $[x]$ , в зависимости от параметра, характеризующего инерционность системы. Диаграммы рассчитаны при отсутствии дополнительной обратной связи (а), когда  $d_0 = 0$ , и при ее наличии (б), когда  $d_0 = 0.4$ . Видно (а), что при  $d_0 = 0$  нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса, существует в относительно узком интервале изменения параметра инерционности: вблизи значения  $\delta = \delta_0 = 1.6$ . За пределами интервала  $\delta \in [1.5; 1.7]$  возбуждаются регулярные колебания. При этом структура генерируемых колебаний изменяется. При  $\delta < 1.5$  наблюдаются относительно простые движения: после бифуркации Андронова–Хопфа, возникающей при достижении параметром инерционности величины  $\delta \approx 0.3$ , при  $\delta \approx 0.7$  происходит переход к двухтактным колебаниям, а при  $\delta \approx 1.2$  — к трехтактным. Об этом свидетельствует то, что максимальные значения колебательного процесса отображаются соответственно одной, двумя и тремя линиями. При  $\delta > 1.7$  реализуются сложные многотактные колебания. При приближении к значению  $\delta \approx 2.7$ , в соответствии с числом линий, возбуждаются колебания с семиоборотным



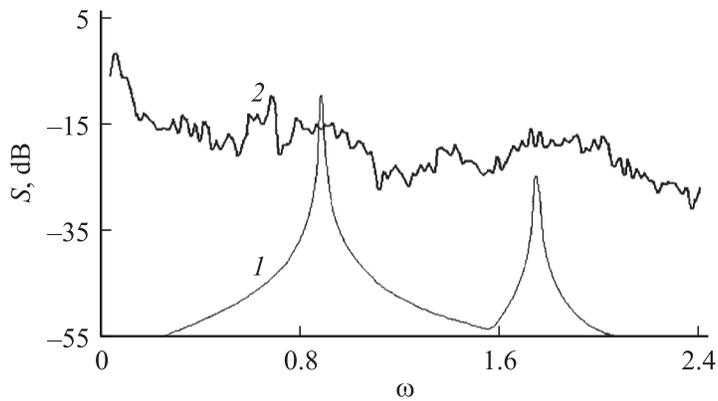
**Рис. 1.** Изменение максимальных значений колебательного процесса в зависимости от параметра инерционности:  $a - d_0 = 0$ ;  $b - d_0 = 0.4$ .

предельным циклом. Характерно, что во всех случаях значения  $[x]$  являются положительными. В связи с этим следует отметить особенность решений уравнения (1): реализации колебаний имеют положительные значения при положительных начальных условиях и отрицательные — при отрицательных их величинах.



**Рис. 2.** Аттракторы, реализующиеся в случае  $\delta = 1$  при  $d_0 = 0$  (a) и при  $d_0 = 0.4$  (b).

При введении переменной дополнительной обратной связи происходит существенное изменение колебательного процесса, отображаемого бифуркационной диаграммой, показанной на рис. 1, a. При этом оказывается возможным управление колебаниями путем выбора частот филь-



**Рис. 3.** Спектры мощности при  $\delta = 1$  в случаях  $d_0 = 0$  (кривая 1) и  $d_0 = 0.4$  (кривая 2).

тующих элементов. Хаотизация колебаний, существующих при  $\delta < \delta_0$ , происходит при выборе величин резонансных частот фильтрующих элементов около значения частоты колебаний, реализующихся при  $d_0 = 0$ . Так, в случае рис. 1, *b*, когда  $\omega_1 = 0.7$ ,  $\omega_2 = 1.1$ , нерегулярный разброс точек, отображающих процесс хаотизации колебаний, возникает, если  $\delta < \delta_0$ . При этом частоты колебаний, возбуждающихся при  $d_0 = 0$ , находятся между значениями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Например, частота генерации при  $\delta = 1$  равна  $\omega \approx 0.9$ . Характерно, что  $[x]$  в случае использования дополнительной обратной связи имеют как положительные, так и отрицательные значения.

Можно полагать, что дополнительная обратная связь способствует „раскачке“ колебаний, генерируемых на частоте, находящейся между значениями собственных частот фильтров. В соответствии с таким представлением при больших частотах фильтров можно хаотизировать сложные колебания, возбуждающиеся при  $\delta > \delta_0$ , когда частота генерации увеличивается. Это подтверждается анализом диаграмм, полученных в случаях, когда  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2$  или  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 3.4$ . Однако четкой закономерности не установлено и при варьировании частот фильтрующих элементов возможны непредсказуемые изменения бифуркационных диаграмм. Этот вопрос требует специального изучения и выходит за рамки статьи.

На рис. 2 приведены аттракторы, соответствующие колебаниям, возбуждающимся при  $d_0 = 0$  (а) и  $d_0 = 0.4$  (b). Аттрактор, представленный на рис. 2, а, рассчитан при параметрах, соответствующих величине  $\delta = 1$  на диаграмме рис. 1, а. Видно, что колебательный процесс является двухтактным и все значения  $x(t)$  (а соответственно и  $[x]$ ) положительные. Хаотический аттрактор, показанный на рис. 2, b, рассчитан в интервале времени  $t \in [240; 360]$  при величинах параметров, соответствующих значению  $\delta = 1$  на диаграмме рис. 1, b. Хаотический аттрактор демонстрирует, что „выбросы“ колебаний  $x(t)$  (а соответственно и  $[x]$ ) имеют как положительные, так и отрицательные значения; он отображает хорошее перемешивание фазовых траекторий.

На рис. 3 иллюстрируется изменение спектра мощности при создании переменной дополнительной обратной связи. Как и аттракторы, показанные на рис. 2, а, b, спектры мощности рассчитаны при параметрах, соответствующих значениям  $\delta = 1$  на диаграммах, представленных на рис. 1, а (кривая 1) и рис. 1, b (кривая 2). Спектр мощности хаотических колебаний (кривая 2) является сплошным и отображает перемежаемость типа „хаос–хаос“.

Приведенная модель и результаты ее численного анализа свидетельствуют об эффективности хаотизации колебаний с помощью предложенного метода, основанного на применении дополнительной обратной связи, обеспечивающей условия автокоммутиции колебаний. Такие системы целесообразно использовать в криптографии при шифровании информации методом, описанным в [6]. Представляется также, что при использовании рассмотренной модели в системах скрытой передачи информации (например, в системе, описанной в [7]), также может быть обеспечена более надежная маскировка сигнала.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-02-0351).

## Список литературы

- [1] Mackey M.C., Glass L. // Science. 1977. V. 197. N 4300. P. 287–289.
- [2] Ikeda K. // Opt. Commun. 1979. V. 30. N 2. P. 257–261.
- [3] Дмитриев А.С., Кислов В.В. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. Гл. 1. С. 49.

- [4] Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 16. С. 37–43.
- [5] Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 6. С. 73–78.
- [6] Кальянов Г.Н., Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 24. С.45–50.
- [7] Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 16. С. 1–9.