

09

Преобразование гармонических колебаний в хаотические

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники РАН (Фрязинский филиал),
Фрязино
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 8 ноября 2006 г.

Рассмотрена новая модель простейшей системы с хаотическим поведением, основанная на модифицированных уравнениях триггера. Численными методами показана возможность преобразования гармонического сигнала в хаотические колебания, демонстрирующие перемежаемость нерегулярных и переключающихся квазирегулярных движений. На основе приведенных результатов численного анализа рассмотрен механизм хаотизации колебаний.

PACS: 05.45.-a

Наряду с хорошо изученными реальными хаотическими системами, нашедшими достаточно широкое применение [1], известны различные искусственно сконструированные системы, обладающие хаотической динамикой [2]. Последние также являются важными не только для расширения познаний в области теории колебаний, но и для практических целей. Их, в частности, удобно использовать для шифрования информации хаосом [3], так как при простоте описывающих их уравнений они обладают хорошо развитым хаосом.

Одна из самых простых неавтономных моделей с хаотическим поведением описана в работе [4]. Настолько же простую систему, но с иным хаотическим аттрактором можно „сконструировать“ на основе классического триггера, уравнения которого в нормированных пере-

менных при аппроксимации нелинейной характеристики с помощью круговой функции имеют вид [5]

$$\begin{aligned} dx/dt &= y + \mu \arctg(x), \\ dy/dt &= -\delta(x + y), \end{aligned} \quad (1)$$

где μ, δ — постоянные коэффициенты.

Уравнениям (1) соответствуют два устойчивых состояния, которые определяются начальными условиями для переменных и параметрами системы; хаос невозможен. Для получения хаотических колебаний оказывается достаточным периодическое изменение переменной x в правой части второго уравнения. В этом случае математическая модель системы принимает вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= y + \mu \arctg(x), \\ dy/dt &= -\delta[x \cos(\omega_0 t) + y], \end{aligned} \quad (2)$$

где ω_0 — частота внешнего воздействия.

На процесс хаотизации колебаний в системе, описываемой уравнениями (2), влияют все параметры. Приведенные результаты численного анализа получены при изменении частоты воздействия („модуляции“), когда параметры μ и δ постоянные ($\mu = \delta = 1.6$). Процессы, происходящие при изменении частоты воздействия, позволяют понять механизм возбуждения хаотических колебаний.

Как выяснено, область хаотических движений обеспечивается в относительно узком интервале изменения выбранной частоты воздействия (при $\omega_0 \in [0.7765, 0.812]$). За пределами этого интервала реализуются регулярные движения, причем в „низкочастотной“ области (при $\omega_0 < 0.7765$) происходит преобразование (деление вдвое) частоты ω_0 так, что частота возбуждающихся колебаний $\omega = \omega_0/2$, а в „высокочастотной“ (при $\omega_0 > 0.812$) — возбуждение колебаний с частотой $\omega = \omega_0$ в одном из двух бассейнов притяжения. Возбуждение колебаний в том или ином бассейне притяжения („положительном“ или „отрицательном“) определяется знаком начальных условий.

На рис. 1, *a–c* приведены характерные реализации, иллюстрирующие структуру колебаний при различных величинах частоты воздействия. Фрагмент реализации, полученный в интервале времени $t \in [600, 750]$ при $\omega_0 = 0.76$ (*a*), иллюстрирует колебания с удвоенным

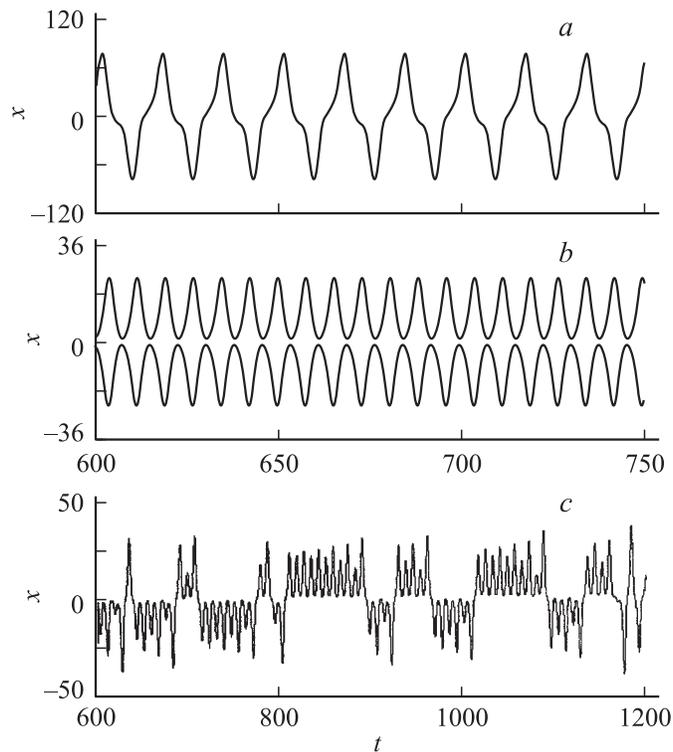


Рис. 1. Фрагменты реализаций колебаний при различных значениях частоты воздействующего сигнала: *a* — $\omega_0 = 0.76$, *b* — $\omega_0 = 0.82$, *c* — $\omega_0 = 0.79$.

периодом. Их частота равна $\omega = 0.38$. На рис. 1, *b* показаны реализации регулярных колебаний, возбуждающихся при $\omega_0 = 0.82$. Верхняя реализация рассчитана в случае положительных значений начальных условий (при $x(0) = y(0) = 0.1$), а нижняя реализация — в случае отрицательных значений (при $x(0) = y(0) = -0.1$).

При $\omega_0 = 0.79$ рассматриваемая система демонстрирует хаос (*c*). При этом проявляется перемежаемость. Видны движения, близкие к регулярным колебаниям, показанным на рис. 1, *a, b*. В основном наблюдается нерегулярное переключение колебаний между областями положительных и отрицательных значений колебательного процесса.

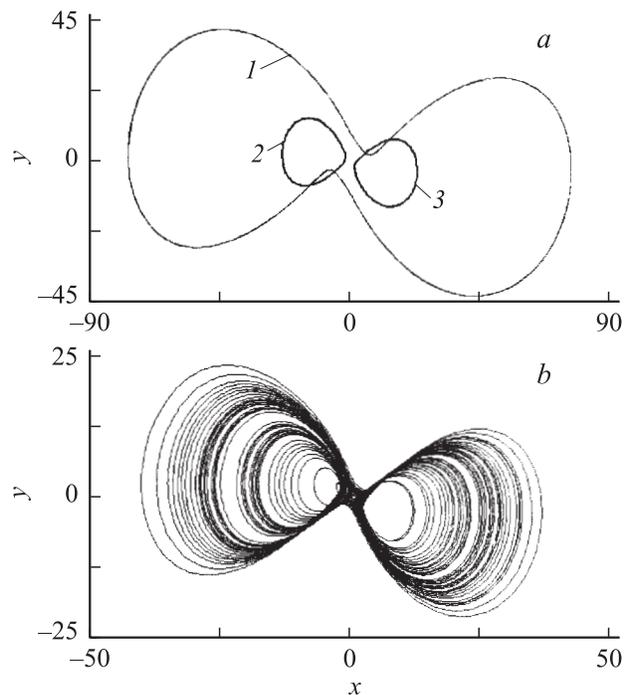


Рис. 2. Проекция траекторий движений изображающей точки при различных значениях частоты воздействующего сигнала. *a*: 1 — $\omega_0 = 0.76$; 2 — $\omega_0 = 0.82$, $x(0) = y(0) = -0.1$; 3 — $\omega_0 = 0.82$, $x(0) = y(0) = 0.1$; *b*: $\omega_0 = 0.79$.

Структура этих колебаний подобна структуре колебаний, показанных на рис. 1, *b*. В интервалах времени $t \in [622, 640]$ и $t \in [1160, 1200]$ заметно возбуждение нерегулярных движений без переключения, подобных колебаниям, показанным на рис.1, *a*. Средняя частота этих движений примерно вдвое меньше средней частоты колебаний, переключающихся из одного бассейна притяжения в другой.

На рис. 2 показаны траектории движений изображающей точки в проекции на плоскость $\{x, y\}$, причем при тех же режимах, при которых рассчитаны фрагменты реализаций, представленные на рис. 1.

Колебаниям, отображающим удвоение периода воздействующего гармонического сигнала, соответствует относительно сложный предель-

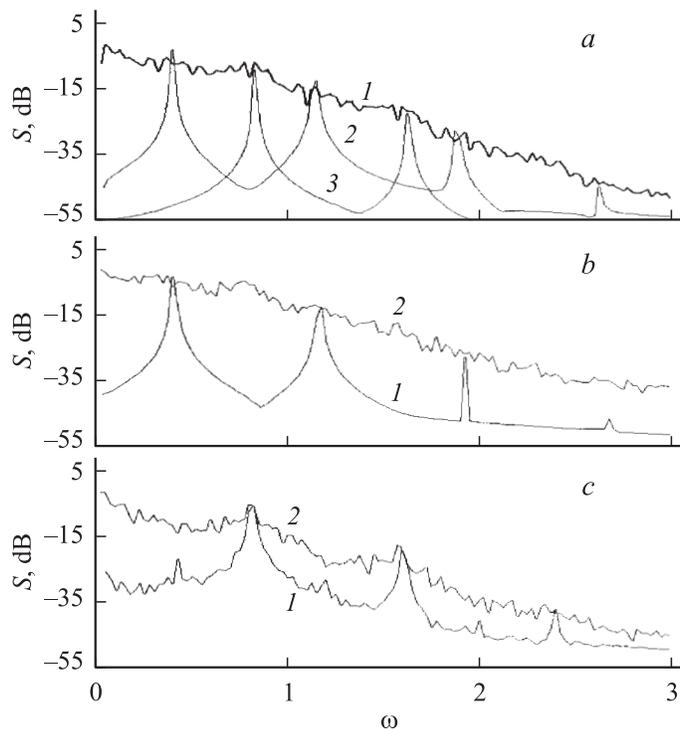


Рис. 3. Спектры мощности при различных значениях частоты воздействующего сигнала. *a*: 1 — $\omega_0 = 0.79$; 2 — $\omega_0 = 0.76$; 3 — $\omega_0 = 0.82$; *b*: 1 — $\omega_0 = 0.7764$; 2 — $\omega_0 = 0.7765$; *c*: 1 — $\omega_0 = 0.808$; 2 — $\omega_0 = 0.798$.

ный цикл (*a*, кривая 1). Колебаниям, возбуждающимся в одном из двух бассейнов притяжения, соответствуют простые предельные циклы. Кривая 2 на рис. 2, *a* получена при отрицательных начальных условиях, а кривая 3 — при положительных. Аттрактор, соответствующий хаотическим колебаниям (*b*), иллюстрирует переключения движений и хорошее перемешивание фазовых траекторий.

На рис. 3 приведены характерные спектры мощности S , рассчитанные при различных режимах работы. Спектр мощности, соответствующий хаотическим колебаниям, показанным на рис. 1, *c*, занимает широкую полосу частот ω (см. рис. 3, *a*, кривая 1). Для сравнения

представлены спектры регулярных колебаний, реализующихся вблизи области хаотизации, когда частота воздействия $\omega_0 = 0.76$ (*a*, кривая 2) и $\omega_0 = 0.82$ (*a*, кривая 3). В обоих случаях начальные условия положительные. Видно, что частота основной составляющей спектра, соответствующего колебаниям с удвоением периода, более чем вдвое меньше частоты основной составляющей колебаний, возбуждающихся в области с переключением движений.

Рис. 3, *b*, *c* иллюстрируют различие переходов к хаосу со стороны низких (*b*) и высоких (*c*) частот. В низкочастотной области хаотизации переход к хаосу от колебаний с удвоением периода происходит жестким образом. При очень малом изменении частоты воздействия происходит существенное изменение спектра мощности: при $\omega_0 = 0.7764$ (*b*, кривая 1) движения еще регулярные с частотой основной гармоники $\omega = \omega_0/2$, а при $\omega_0 = 0.7765$ (*b*, кривая 2) — уже хаотические, причем с малыми перепадами спектральной плотности мощности хаотических колебаний. В высокочастотной области хаотизации, когда достаточно четко проявляется бистабильность, при переходе от регулярных движений к хаотическим колебаниям сохраняются максимумы спектральной плотности мощности на частотах ω_0 (*c*, кривая 1). При этом виден „выброс“ спектральной плотности мощности и на частоте колебаний, возбуждающихся при удвоении периода. При уменьшении частоты воздействия этот выброс исчезает, а спектр мощности отображает более развитую хаотичность движений (*c*, кривая 2).

Приведенные результаты позволяют представить механизм хаотизации колебаний как результат конкуренции двух типов движений. В области хаотизации воздействующие колебания стимулируют возбуждение как колебаний с удвоением периода, так и колебаний с переключением их между двумя бассейнами притяжения. Возникает перемежаемость. Конкуренция колебаний приводит к тому, что при срыве движений с удвоением периода нерегулярным образом изменяются условия для возбуждения колебаний в том или ином бассейне притяжения, а соответственно нерегулярным становится и изменение длительности цугов переключающихся движений.

Рассмотренная система, позволяющая преобразовывать гармонические колебания в сложные регулярные движения и даже в хаотические, иллюстрирует возможность управления колебаниями. Она представляет интерес как очень простая математическая модель, пригодная для шифрования информации методом [3], основанным на использовании

хаотических решений детерминированных уравнений, и показывает, как малая модификация уравнений может приводить к принципиально новому поведению описываемой ими системы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-02-16536).

Список литературы

- [1] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2002. 252 с.
- [2] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2001. 296 с.
- [3] *Кальянов Г.Н., Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 24. С. 45–50.
- [4] *Matsumoto T., Chua L.O., Tsonaka S.* // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. N 2. P. 1155–1157.
- [5] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 13. С. 45–50.