

01

Изменение параметров спиральной волны в присутствии топологического дефекта

© К.В. Андреев, Л.В. Красичков

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: kandreev@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 28 сентября 2006 г.

Рассматривается динамика уединенной спиральной волны в двумерной решетке модельных элементов ФитцХью–Нагумо с диффузионной связью при внесении точечного топологического дефекта, характеризующегося постоянным значением потенциала. Показано, что в зависимости от величины потенциала дефекта масштаб пространственно-временных структур в системе может претерпевать значительные изменения. Исследованы некоторые особенности взаимодействия спиральной волны с дефектами для моделей возбудимой и осциллирующей сред.

PACS: 05.45.Xt, 89.75.Kd

Исследование сложной пространственно-временной динамики неоднородных распределенных систем, демонстрирующих автоволновое поведение, является одной из актуальных задач нелинейной динамики и теории структурообразования [1–6]. Одним из частных случаев неоднородностей в нелинейных активных средах являются топологические дефекты. В связи с тем что автоволновые явления могут наблюдаться в системах различной природы [1–4], можно ожидать, что особенности взаимодействия автоволн с дефектами, выявляемые на относительно простых математических моделях, будут носить универсальный характер.

В работе [7] на примере двумерной решетки модельных нейронов, описываемых кусочно-линейными отображениями, было показано, что при помощи точечных топологических дефектов возможно задать направленное движение спиральной волны, например, организовав движение ядра волны вдоль дорожки из дефектов. Под дефектом в данном случае понимается отсутствие модельного элемента в заданном узле решетки. В работе [8] была продемонстрирована аналогичная возможность для классической модели возбудимой среды, описываемой

уравнениями ФитцХью–Нагумо [9,10] с диффузионными связями:

$$\begin{cases} \frac{dx_{i,j}}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{3} x_{i,j}^3 + x_{i,j} - y_{i,j} \right) + I_{i,j}, \\ \frac{dy_{i,j}}{dt} = x_{i,j} - ay_{i,j} + b, \end{cases} \quad (1)$$

$$I_{i,j} = D(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} + 4x_{i,j}), \quad (2)$$

где $i, j = 1, 2, \dots, 100$, $b = 0.55$; $\varepsilon = 1/15$; $D = 5.0$, параметр a является управляющим.

В данной работе рассматривается более общий случай формирования топологических дефектов, а именно внесение постоянного потенциала P в некоторых точках модельной среды, описываемой уравнениями (1), (2). В зависимости от значения параметра a среда может демонстрировать возбудимую или автоколебательную динамику [3,11]. При получении представленных ниже результатов использовались значения $a = 1.0$ для моделирования возбудимой среды и $a = 0.6$ для моделирования осциллирующей среды.

Рассмотрим решетку элементов ФитцХью–Нагумо, моделирующую двумерную возбудимую среду, в которой сформирована спиральная волна (рис. 1, *a*). Поместим вблизи ядра спиральной волны точечный дефект, находящийся под некоторым постоянным потенциалом P . В математической форме записи это будет означать, что в данном узле решетки (k, l) выполняется условие $x_{k,l} \equiv P \forall t > t_0$, где t_0 — момент внесения точечного дефекта. При задании значения потенциала дефекта P , сравнимого с амплитудой изменения переменной состояния x_{ij} , происходит захват ядра волны точечным дефектом аналогично описанному в работе [8]. Однако в рассматриваемом случае пространственно-временная динамика системы будет изменяться в зависимости от значения потенциала дефекта P . При отрицательных значениях P шаг спирали h увеличивается по сравнению с наблюдаемым в системе в отсутствие топологического дефекта (рис. 1, *b*). Увеличение значения потенциала P ведет к уменьшению шага спирали h (рис. 1, *c*), которое может быть весьма существенным (рис. 1, *d*).

Зависимость шага спиральной волны h от величины потенциала дефекта P проиллюстрирована на графике (рис. 1, *e*). Нетрудно видеть, что шаг спирали может изменяться более чем в два раза. Горизонтальной пунктирной линией показано значение шага спиральной волны $h = 36$, соответствующее поведению системы в отсутствие дефекта.

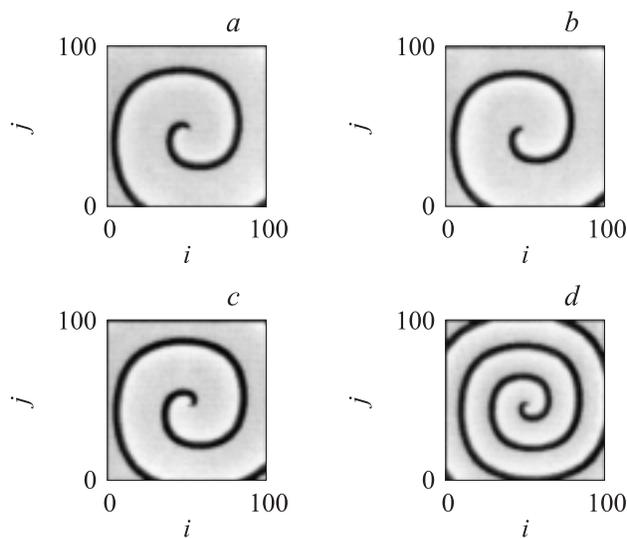


Рис. 1. Динамика спиральных волн в решетке возбудимых элементов ФитцХью–Нагумо (1), (2) при $a = 1.0$, $b = 0.55$; $\varepsilon = 1/15$; $D = 5.0$. $a-d$ — мгновенные значения амплитуды переменной состояния x : a — спиральная волна в отсутствие топологического дефекта; спиральная волна при наличии дефекта с потенциалом P : $b - P = -6$, $c - P = 0$, $d - P = 2$. e — зависимость шага спиральной волны h от значения потенциала дефекта P , f — зависимость периода колебаний T от значения потенциала дефекта P ; пунктирной линией показаны значения, соответствующие решетке в отсутствие дефекта; в области, обозначенной буквой C , колебания не являются периодическими, а интервалы времени между локальными максимумами переменной состояния x лежат в указанном диапазоне. На рис. 1, $b-d$ дефект отмечен точкой в центре среды ($i = 50$, $j = 50$).

Внесение дефекта с потенциалом P приводит к изменению в системе не только периода пространственных колебаний, но и периода временных колебаний. Оказывается, что период T , измеренный в относительных единицах времени, также может изменяться в широких пределах в зависимости от значения потенциала дефекта P (рис. 1, f). При этом в области, обозначенной на рис. 1, f буквой C , колебания перестают быть периодическими.

В работах [3,11] было показано, что соотношение параметров исследуемой системы (1), (2) задает такие характеристики спиральной

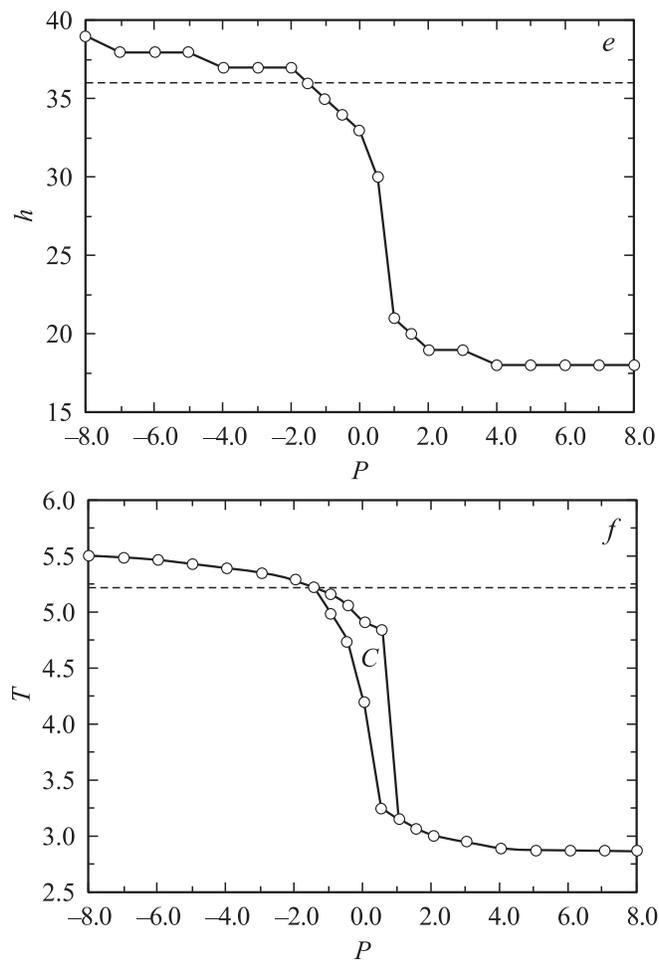


Рис. 1 (продолжение).

волны, как шаг спирали, траектория движения ядра спиральной волны. В рамках данной работы удалось показать, что аналогичные изменения могут быть достигнуты путем вариации потенциала дефекта P лишь в одном элементе решетки. Для объяснения обнаруженного явления рассмотрим поведение спиральной волны вблизи ее ядра. Известно [1], что характеристики спиральной волны определяются радиусом ядра

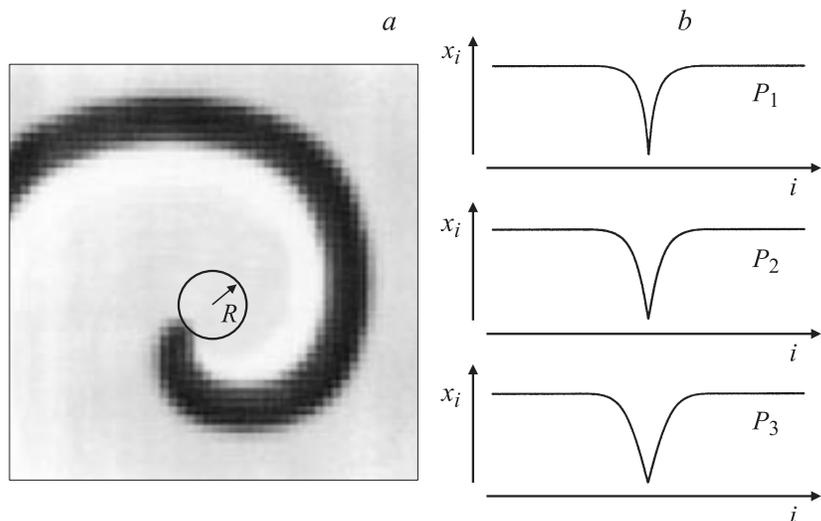


Рис. 2. *a* — увеличенный фрагмент спиральной волны вблизи ее ядра; *b* — характер изменения амплитуды колебаний вблизи ядра спиральной волны в зависимости от потенциала дефекта P ($P_1 > P_2 > P_3$).

спиральной волны R (рис. 2, *a*). Для непрерывной среды также известно, что непосредственно в центре спиральной волны производные от переменных состояния по времени обращаются в ноль, т.е. колебания полностью отсутствуют. В случае дискретной среды точки, в которой такие условия выполняются абсолютно точно, не существует, а область, которую можно считать ядром спиральной волны, характеризуется очень малой (по сравнению с остальными элементами решетки) амплитудой колебаний. Значение $P = P_0$ соответствует случаю, когда поведение системы при наличии дефекта совпадает с поведением решетки без топологических дефектов. Внесение дефекта с потенциалом $P < P_0$ гасит колебания в некоторой окрестности дефекта, что приводит к увеличению радиуса R ядра волны. Радиус ядра оказывается тем больше, чем меньше значение P . Соответственно, при $P > P_0$ внесение потенциала дефекта приводит к возбуждению подпороговых колебаний в окрестности дефекта, что влечет уменьшение радиуса ядра волны. На рис. 2, *b* схематически показано изменение амплитуды колебаний вблизи ядра спиральной волны в зависимости от потенциала дефекта P .

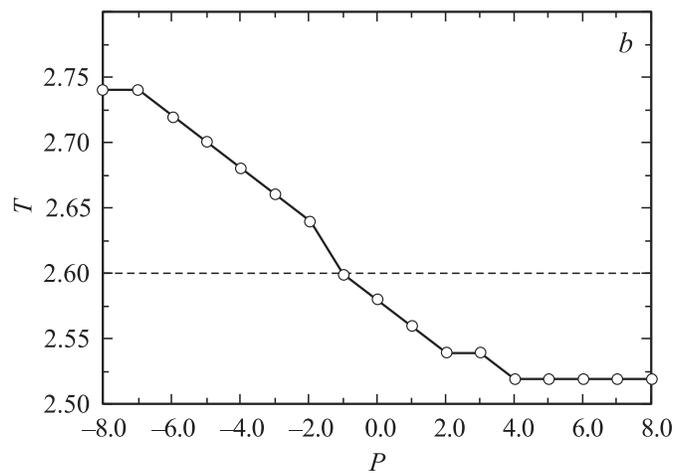
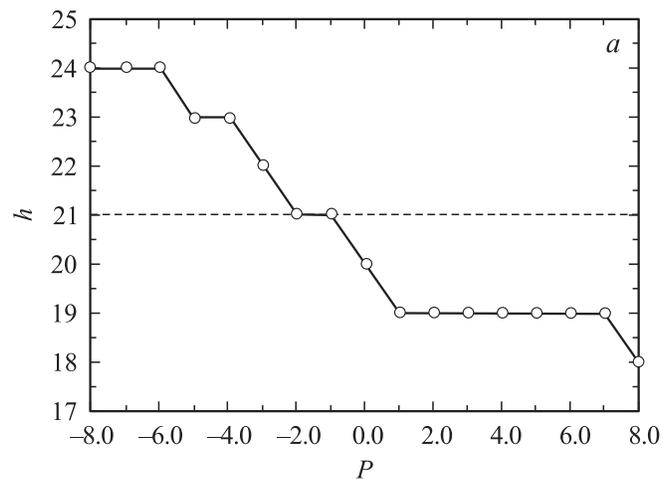


Рис. 3. Характеристики динамики спиральных волн в решетке автоколебательных элементов ФитцХью–Нагумо (1), (2) при $a = 0.6$, $b = 0.55$; $\varepsilon = 1/15$; $D = 5.0$. a — зависимость шага спиральной волны h от значения потенциала дефекта P , b — зависимость периода колебаний T от значения потенциала дефекта P . Пунктирной линией показаны значения, соответствующие решетке в отсутствие дефекта.

В случае, когда параметры системы (1), (2) соответствуют модели осциллирующей среды, наблюдается аналогичный эффект изменения характеристик пространственно-временной структуры в зависимости от значения потенциала дефекта P . Однако при этом диапазоны изменения шага спирали h и временного периода колебаний T существенно сужаются (рис. 3, a, b) по сравнению со случаем возбудимой среды (рис. 1, e, f).

Выявленные особенности взаимодействия спиральной волны с топологическим дефектом открывают новые возможности управления пространственно-временной динамикой возбудимых и осциллирующих сред. Внесение точечного топологического дефекта с заданным фиксированным потенциалом позволяет изменять масштаб как пространственных, так и временных колебаний в системе. Полученные закономерности могут быть также применены для управления движением спиральных волн в нелинейных активных средах.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-3087.2005.2.

Список литературы

- [1] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
- [2] Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы / Под ред. Д.С. Чернавского. М.: Наука, ГРФМЛ, 1987 (Соврем. пробл. физики). 240 с.
- [3] Рабинович М.И., Езерский А.Б. Динамическая теория формообразования. М.: Янус-К, 1998. 192 с.
- [4] Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.Д. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. 2-е изд. М.: Физматлит, 2005. 212 с.
- [5] Bub G., Shrier A., Glass L. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 028105.
- [6] Jiang M., Wang X., Ouyang Q., Zhang H. // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. P. 056202.
- [7] Андреев К.В., Красичков Л.В. // Изв. РАН. Сер. Физ. 2003. Т. 67. № 12. С. 1701.
- [8] Андреев К.В., Красичков Л.В. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 1. В. 13. С. 18.
- [9] FitzHugh R. // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445.
- [10] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. // Proc. IRE. 1962. V. 50. P. 2061.
- [11] Barkley D., Kness M., Tuckerman L. // Phys. Rev. A. 1990. V. 42. N 4. P. 2489.