

01

## О новом подходе к асимптотическим абсорбирующим граничным условиям для волнового уравнения

© М.Ю. Трофимов

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН им. В.И. Ильичева,  
Владивосток  
E-mail: dominus@poi.dvo.ru

Поступило в Редакцию 3 августа 2006 г.

Методом многомасштабных разложений получены новые приближенные абсорбирующие граничные условия для волнового уравнения.

PACS: 04.30.Nk

Мы рассмотрим построение абсорбирующих граничных условий для волнового уравнения (нижний индекс используется для обозначения частных производных по соответствующей переменной)

$$u_{xx} + u_{yy} - \left( \frac{1}{c^2} u_t \right)_t = 0; \quad (1)$$

основные формулы, полученные в этой работе, переносятся на случай произвольной пространственной размерности непосредственно. Такие условия необходимо ставить на границах ограниченной расчетной области для численного решения задач, относящихся к неограниченным областям. Формулировка граничных условий такого типа связана с разделением падающих на границу и уходящих с границы волн, что в имеющихся работах достигается факторизацией уравнения на множители, описывающие распространение волн в одном направлении [1].

Хорошо известно, что приближенное описание однонаправленного распространения волн дается методом ВКБ (Венцеля–Крамера–Бриллюэна) или лучевым методом [2], которые можно отнести к методам многомасштабных разложений [3]. Возможность совместного рассмотрения волн, распространяющихся в различных направлениях, при этом сохраняется из-за нелинейности появляющегося в этих

методах уравнения Гамильтона–Якоби (эйконала) для фазовой переменной.

Для проведения этой программы для уравнения (1) мы, следуя обобщенному методу многих масштабов [3], вводим медленные переменные  $X = \epsilon x$ ,  $Y = \epsilon y$  и  $T = \epsilon t$  быструю переменную  $\eta = (1/\epsilon)\theta(X, Y)$ , где  $\epsilon$  — малый параметр, заменяем производные удлинненными производными по правилам

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial X} + \theta_X \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial Y} + \theta_Y \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial T} + \theta_T \frac{\partial}{\partial \eta}$$

и подставляем в полученное уравнение разложение

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots$$

Разделяя по степеням  $\epsilon$ , мы обычным образом получаем в нулевом порядке по  $\epsilon$  уравнение Гамильтона–Якоби (эйконала) для фазы  $\theta$ , которую мы в этой работе считаем действительной,

$$\frac{1}{c^2} (\theta_T)^2 - (\theta_X)^2 - (\theta_Y)^2 = 0. \quad (2)$$

Далее, отделяя быструю переменную, т.е. используя представление

$$u_0 = A(X, Y, T)\varphi(\eta), \quad (3)$$

в первом порядке по  $\epsilon$  мы получаем уравнение для амплитуды  $A$

$$\left( \frac{1}{c^2} \theta_T A \right)_T + \frac{1}{c^2} \theta_T A_T - (\theta_X A)_X - \theta_X A_X - (\theta_Y A)_Y - \theta_Y A_Y = 0. \quad (4)$$

Складывая уравнение (2), умноженное на  $2(1/\epsilon)A\varphi'$ , с уравнением (4), умноженным на  $\varphi$  ( $(1/\epsilon)\theta$ ), получаем для нулевого приближения, в котором быстрая переменная  $\eta$  заменена ее явным выражением через фазу  $\theta$ ,  $\bar{u}_0(X, Y, T) = u_0(X, Y, T, (1/\epsilon)\theta(X, Y, T))$ , уравнение

$$\left( \frac{1}{c^2} \theta_T \bar{u}_0 \right)_T + \frac{1}{c^2} \theta_T \bar{u}_{0T} - (\theta_X \bar{u}_0)_X - \theta_X \bar{u}_{0X} - (\theta_Y \bar{u}_0)_Y - \theta_Y \bar{u}_{0Y} = 0,$$

которое, переходя к исходным переменным и вводя частоту  $\omega = -\theta_T$  и волновые числа  $k = \theta_X$ ,  $l = \theta_Y$ , имеющие в используемом методе

нулевой порядок по  $\epsilon$ , окончательно запишем в виде

$$\left(\frac{1}{c^2} \omega \bar{u}_0\right)_t + \frac{1}{c^2} \omega \bar{u}_{0t} + (k \bar{u}_0)_x + k \bar{u}_{0x} + (l \bar{u}_0)_y + l \bar{u}_{0y} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что общий вид представления (3) с гладкой функцией  $\varphi$  позволяет рассматривать как быстроосциллирующие асимптотики, так и асимптотики по гладкости. Так, например, интегрирование одной из стандартных аппроксимаций для  $\delta$ -функции Дирака [4] дает аппроксимацию для ступенчатой функции Хевисайда  $H(x)$ , входящей в фундаментальное решение уравнения (1) [4], вида

$$H(x) \approx \frac{1}{\pi} (\arctg(x/\epsilon) + \pi/2) \quad \text{при } \epsilon \rightarrow 0.$$

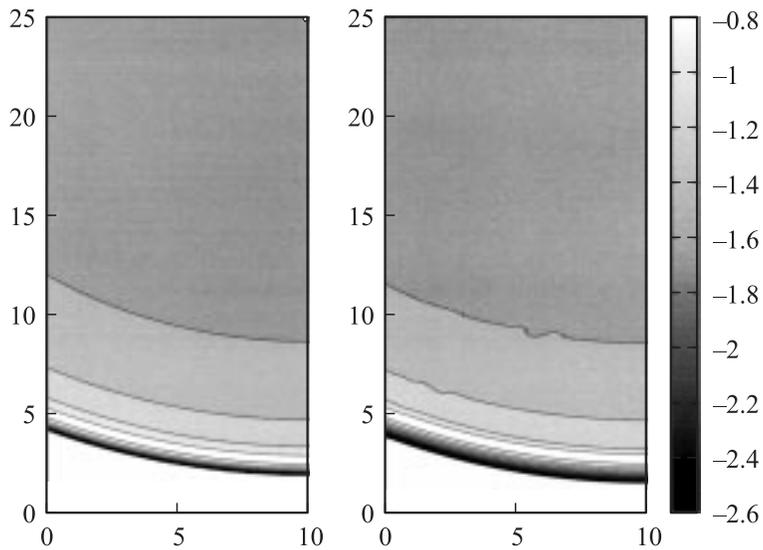
В настоящей работе предполагается использовать формулу (5), в которой  $\bar{u}_0$  заменено на  $u$ , в качестве приближенного абсорбирующего граничного условия при решении начально-краевых задач для уравнения (1). Именно, пусть начальные данные  $u_t$  при  $t = t_0$  заданы в ограниченной области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$  и удовлетворяют некоторым условиям типа условия излучения, на точной формулировке мы здесь не будем останавливаться. Например, эти данные могут быть равны нулю вне области, компактно входящей в область  $\Omega$ . Предположим, что

$$u_t(x, y) \approx A_t(\epsilon x, \epsilon y) \varphi((1/\epsilon)\theta_t(\epsilon x, \epsilon y))$$

для некоторых функций  $A$ ,  $\varphi$ ,  $\theta_t$ . Тогда в качестве приближенного решения задачи Коши в неограниченном пространстве с начальными данными  $u_t$  предлагается использовать решение начально-краевой задачи в области  $\Omega$  с граничными условиями

$$\left(\frac{1}{c^2} \omega u\right)_t + \frac{1}{c^2} \omega u_t + (ku)_x + k u_x + (lu)_y + l u_y = 0 \quad (6)$$

на  $\partial\Omega$ , где  $\omega = -\theta_t$ ,  $k = \theta_x$  и  $l = \theta_y$  для  $\theta$ , полученной как решение задачи Коши в неограниченном пространстве для уравнения (2) с начальными данными  $\theta_t$ . В случае многозначного решения выбирается такая ветвь решения, у которой волновой вектор  $(k, l)$  на  $\partial\Omega$  направлен вовне области.



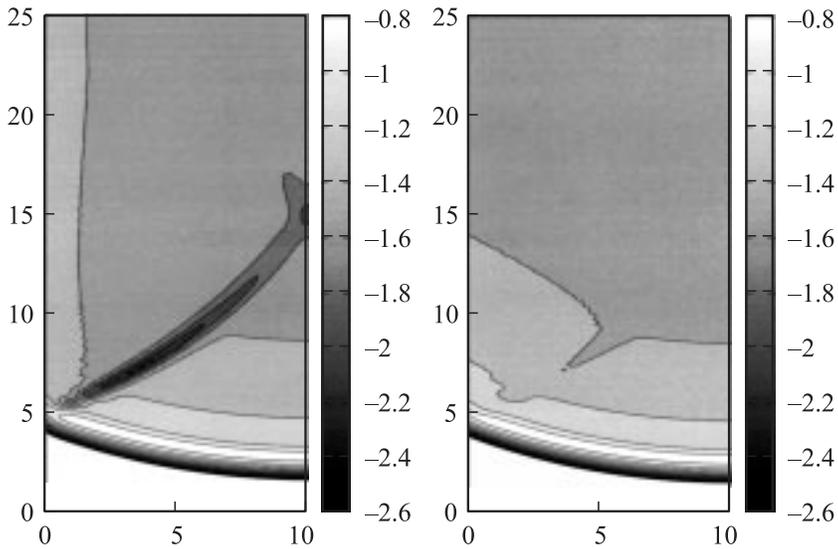
**Рис. 1.** Изолинии  $\log_{10}(|u|)$ . Слева — точное решение, справа — результат расчета с граничными условиями (6).

Как пример применения граничных условий (6) мы представим расчеты по численному моделированию волны от точечного источника с координатами  $x_s, y_s$ :

$$u(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{t-r} \frac{f(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2+r^2}} d\tau, & \text{при } t > r, \\ 0, & \text{при } 0 < t < r, \end{cases} \quad (7)$$

где  $r = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$ , с функцией источника  $f(t)$ , равной нулю вне интервала  $(0, \tau_0)$ . Такая  $u$  есть решение уравнения (1) с  $c = 1$  при  $t > \tau_0$  и использовалась, по-видимому, в численных примерах работы [1].

Решение (7) при  $t \gg \tau_0$  сближается соответствующим решением с  $f(t) = \delta(t)$ , т.е. фундаментальным решением, имеющим вид [4]  $A(x, y, t)H(t - r)$ . Поэтому в представленном ниже численном примере мы полагали  $T = \epsilon t$ ,  $X = \epsilon(x - x_s)$ ,  $Y = \epsilon(y - y_s)$ ,



**Рис. 2.** Изолинии  $\log_{10}(|u|)$ . Результаты расчетов с граничными условиями из [1] первого порядка (слева) и второго порядка (справа).

$\theta(X, Y, T) = T - \sqrt{X^2 + Y^2}$ . Эта  $\theta$ , очевидно, удовлетворяет уравнению (2). Отметим, что в данном случае частота и волновые числа не зависят от  $\epsilon$ , так что граничные условия (6) определены без дальнейших уточнений.

Расчеты производились с использованием сдвинутой сетки и явной разностной схемы, описанных в [1]. В качестве начальных условий использовалось решение (7) с источником

$$f(t) = \begin{cases} A_s t^2 (\tau_0 - t)^2, & \text{при } 0 < t < \tau_0, \\ 0, & \text{при } t > \tau_0, \end{cases}$$

где  $A_s$  — амплитуда источника, расположенным в правом верхнем углу расчетной области, при  $t = 8$ . Длительность источника  $\tau_0$  принималась равной 1.3. Использовалась дискретизация с шагами по пространству  $\Delta x = \Delta y = 0.1$  и шагом по времени  $\Delta t = 0.04$ . На рисунках представлены решения после 380 шагов, т. е. при времени  $t = 23.2$ .

На рис. 1 представлены точное решение и результаты расчетов, при которых на верхней, правой и нижней границах области ставились граничные условия Неймана, а на границе  $x = 0$  — граничные условия (6). Для сравнения на рис. 2 показаны аналогичные расчеты с условиями первого и второго порядков из работы [1]. Отраженная волна, хорошо видная при использовании условий первого порядка Энгквиста–Майды, значительно слабее при использовании условий второго порядка и еще меньше проявляется при расчетах с условиями (6).

В заключение отметим, что в нашем методе нетрудно получить последующие по порядкам  $\epsilon$  приближенные граничные условия. Корректность начально-краевых задач с такими условиями требует анализа, который весьма затрудняется возможным сложным характером решений уравнения Гамильтона–Якоби [2].

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 14, раздел 2.

## Список литературы

- [1] *Engquist B., Majda A.* // *Mathematics of Computation.* 1977. V. 31. N 139. P. 639–651.
- [2] *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
- [3] *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
- [4] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.