01

# Полиномиальный инвариант двоякопериодических плетеных структур

© С.А. Гришанов, В.Р. Мешков, А.В. Омельченко

Университет Де-Монфорт, Лейстер, Великобритания
С.-Петербургский государственный политехнический университет
С.-Петербургский государственный университет технологии и дизайна
E-mail: vmu@peterlink.ru

Поступило в Редакцию 28 ноября 2005 г.

Построен изотопический полиномиальный инвариант кауфмановского типа от двух переменных для двоякопериодических плетеных структур.

PACS: 04.20.Jz

Свойства заузленных и зацепленных конфигураций в пространстве долгое время были предметом интереса только математиков. Теория узлов, имеющая в значительной мере „физическое“ происхождение, выросла в самостоятельный раздел топологии. Однако в последние три десятилетия обнаружилась глубокая связь этой теории с различными разделами физики. В частности, оказалось, что уравнение Янга–Бакстера, играющее важную роль в статистической и квантовой физике, появляется также и в теории узлов, где оно связано с одним из так называемых преобразований Рейдемейстера, не меняющих топологический тип узла. Осознание этой связи привело к открытию новых мощных инвариантов в теории узлов — полиномов Джонса, Кауфмана, HOMFLY и др. [1–3]. В свою очередь физики получили в распоряжение новые аналитические методы.

Двоякопериодические плетеные структуры (далее — 2-структуры) столь же часто встречаются в приложениях, как узлы и зацепления. Так, например, двумерные модели статистической физики строятся на двоякопериодических решетках [4], кроме того, множество примеров „реальных“ 2-структур дают текстильные материалы. Для таких приложений исследование топологических свойств 2-структур представляет несомненный интерес. Несмотря на это, как топологический объект

2-структуры специально не рассматривались, в частности, отсутствует классификация 2-структур.

Основным инструментом исследования узлов и зацеплений являются инварианты. Инвариантом называется функция на множестве узлов, которая принимает одинаковые значения на эквивалентных узлах. Два узла считаются топологически эквивалентными, если один из них можно непрерывно преобразовать в другой без самопересечений (такое преобразование называется изотопией). Для 2-структур естественно рассматривать изотопии, сохраняющие периодичность.

Двоякопериодическая структура (и любой ее инвариант) полностью определяется заданием минимального повторяющегося элемента — элементарной ячейки. Такой элемент может быть выбран бесконечным числом способов; изотопический инвариант структуры не должен зависеть от выбора элементарной ячейки. В статье построен полиномиальный инвариант 2-структур, удовлетворяющий этому требованию.

1. Инварианты узлов определяются с помощью диаграмм — невырожденных плоских проекций с указанием типа перекрестков [5]. Двоякопериодической структуре естественно сопоставить диаграмму на торе. Такая диаграмма получается в результате отождествления противоположных сторон элементарной ячейки, выбранной на плоской диаграмме структуры (рис. 1). Ясно, что указанное сопоставление не единственно — этот факт иллюстрирует рис. 2 — имеется взаимно однозначное соответствие между множеством несократимых дробей $\pm p/q$ и множеством элементарных ячеек (рассматриваемых с точностью до сдвига).

Отношение эквивалентности на множестве торических диаграмм, соответствующих 2-структуре, можно задать при помощи скручиваний тора, определяемых следующим образом. Разрежем тор вдоль произвольного меридиана, повернем один из краев разреза в своей

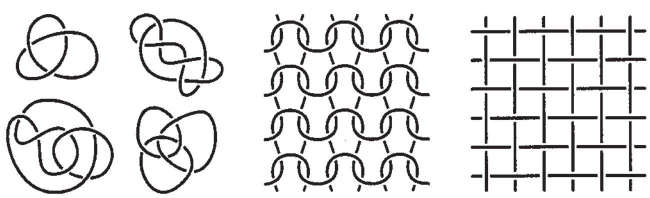


**Рис. 1.** Диаграммы узлов, зацеплений и 2-периодических структур.

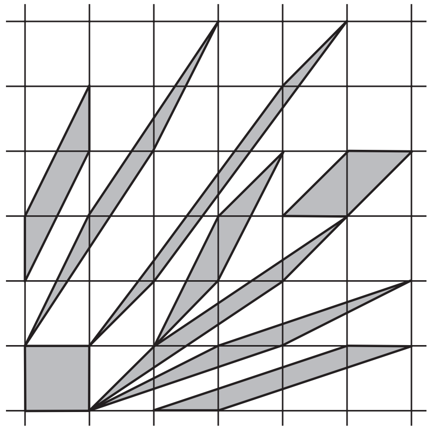


**Рис. 2.** Элементарные ячейки.

плоскости на $360^\circ$, затем склеим края. Эту процедуру будем называть скручиванием вдоль меридиана. Аналогично определим скручивание вдоль параллели. Нетрудно понять, что при помощи скручиваний можно из произвольной элементарной ячейки получить любую другую.

2. В теории узлов два узла (зацепления) $K_1$ и $K_2$ называют эквивалентными, если существует семейство диффеоморфизмов $f_t$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, гладко зависящих от $t \in [0, 1]$, в котором $f_0$ — тождественный диффеоморфизм, а $f_1$ переводит $K_1$ в $K_2$ (так называемая изотопия, связывающая $K_0$ и $K_1$). Отметим, что требование взаимной однозначности преобразований $f_t$ запрещает самопересечения узла в процессе изотопии. Аналогичным образом определяется понятие плоской изотопии для диаграмм.

В терминах диаграмм два неориентированных узла $K_1$ и $K_2$ эквивалентны, если и только если диаграмма $K_1$ может быть преобразована в диаграмму $K_2$ с помощью плоских изотопий и движений Рейдемейстера $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ (рис. 3) (теорема Рейдемейстера).

Для диаграмм на торе определим движения Рейдемейстера $\Omega_1$, $\Omega_2$, $\Omega_3$ точно так же, как они определены для диаграмм на плоскости, а вместо плоской изотопии будем говорить об изотопии на поверхности тора.

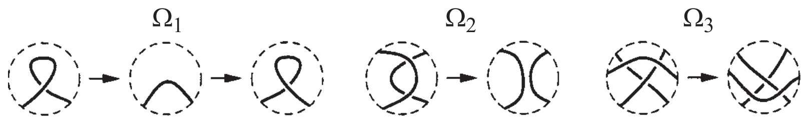



**Рис. 3.** Движения Рейдемейстера.

В отличие от случая обычных диаграмм, только движений Рейдемейстера и изотопий недостаточно, чтобы судить об эквивалентности 2-структур, представленных двумя диаграммами на торе: может оказаться, что эти диаграммы соответствуют двум различным элементарным ячейкам одной и той же структуры. Чтобы устранить проблему, связанную с неоднозначностью выбора элементарной ячейки, к преобразованиям диаграмм на торе необходимо добавить скручивания, определенные выше. Справедливо следующее обобщение теоремы Рейдемейстера.

***Теорема.*** Две диаграммы на торе соответствуют изотопным двоякопериодическим структурам, если и только если эти диаграммы можно преобразовать одну в другую с помощью изотопий на поверхности тора, конечного числа движений Рейдемейстера и скручиваний тора.

Таким образом, любая функция, заданная на множестве торических диаграмм и не меняющаяся при скручивании и движениях Рейдемейстера, определяет изотопический инвариант 2-структур. Построим такую функцию со значениями в множестве полиномов.

3. Следуя [2], сопоставим каждой торической диаграмме $l$ полином $\langle l\rangle$ от переменных $a, b, c$, удовлетворяющий соотношениям

$$\langle l\rangle = a\langle l_A\rangle + b\langle l_B\rangle; \tag{1}$$

$$\langle l \cup \bigcirc\rangle = c\langle l\rangle; \tag{2}$$

$$\langle\bigcirc\rangle = 1. \tag{3}$$

Здесь $l =$ , $l_A =$ , $l_B =$  — три диаграммы, совпадающие вне показанного пунктирного кружка; $\bigcirc$ — диаграмма в виде окружности. Полином $\langle l\rangle$ называется скобкой Кауфмана [5].

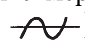
Пусть $n$ — число перекрестков в диаграмме $l$. Последовательное применение соотношения (1) для каждого перекрестка позволяет выразить $\langle l\rangle$ через полиномы $\langle l_S\rangle$, соответствующие $2^n$ тривиальным (без перекрестков) диаграммам $l_S$:

$$\langle l \rangle = \sum_S a^{\alpha(S)} b^{\beta(S)} \langle l_S \rangle. \tag{4}$$

Если выбрана некоторая нумерация перекрестков, то каждая из этих $2^n$ диаграмм может быть задана бинарной строкой вида

$$S = \underbrace{ABBA \dots AB}_{n},$$

где символ в $i$-й позиции обозначает тип „расщепления“ $i$-го перекрестка ($A$ или $B$, см. определение $l_A$ и $l_B$). Говорят, что строка $S$ определяет состояние диаграммы. В формуле (4) $l_S$ обозначает диаграмму $l$ в состоянии $S$; $\alpha(S)$ и $\beta(S)$ — число расщеплений типа $A$ и типа $B$ соответственно в состоянии $S$; суммирование производится по всем $2^n$ состояниям диаграммы $l$.

Тривиальная торическая диаграмма содержит некоторое число окружностей и, возможно, набор замкнутых непересекающихся кривых, обвивающихся вокруг тора. Назовем такой набор намоткой и обозначим $(m, n)$, где $m$ и $n$ — число пересечений намотки с меридианом и с параллелью тора соответственно (без „меандров“ ). Чтобы вычислить скобку $\langle l_S \rangle$, к соотношениям (2), (3) необходимо добавить определение скобки Кауфмана $\langle (m, n) \rangle$ для намотки $(m, n)$.

Определим $\langle (m, n) \rangle$ так, чтобы полином (4) не менялся при скручиваниях тора, т. е. не зависел от выбора элементарной ячейки 2-структуры. Отметим простые свойства намоток.

1. Намотка $(m, n)$ содержит в точности $g = \gcd(m, n)$ компонент.

2. При скручиваниях тора число компонент намотки не меняется.

3. Намотка $(m_1, n_1)$ переводится в намотку $(m_2, n_2)$ последовательностью скручиваний, если и только если $\gcd(m_1, n_1) = \gcd(m_2, n_2)$.

Последнее свойство показывает, что необходимо выполнение условия

$$\langle (m_1, n_1) \rangle = \langle (m_2, n_2) \rangle, \quad \text{если} \quad \gcd(m_1, n_1) = \gcd(m_2, n_2). \tag{5}$$

Простейший способ удовлетворить (5) состоит в том чтобы ввести дополнительную переменную $t$ и положить $\langle (m, n) \rangle = t^g$, $g = \gcd(m, n)$.

Пусть тривиальная диаграмма $l_S$ содержит $k$ окружностей. Положим $\gamma(S) = k$, если в диаграмме есть намотка, и $\gamma(S) = k - 1$ — в противном случае; обозначим $g(S)$ число компонент намотки, если намотки нет, будем считать $g(S) = 0$. Выражение (4) принимает явный вид:

$$\langle l \rangle = \sum_S a^{\alpha(S)} b^{\beta(S)} c^{\gamma(S)} t^{g(S)}. \tag{6}$$

Числа $\alpha, \beta, \gamma$, очевидно, не меняются при скручиваниях, поэтому скобка Кауфмана (6) есть инвариант относительно выбора элементарной ячейки. Требование инвариантности $\langle l \rangle$ по отношению к движениям Рейдемейстера $\Omega_2$ и $\Omega_3$, как и в классическом случае, приводит к следующим ограничениям на переменные $a$, $b$, $c$: $b = a^{-1}$, $c = -a^2 - a^{-2}$ [6,5]. Для обеспечения инвариантности относительно движения $\Omega_1$ следует от $\langle l \rangle$ перейти к полиному

$$X(l) = (-a)^{-3\sigma(l)} \langle l \rangle = (-a)^{-3\sigma(l)} \sum_S a^{\alpha(S)-\beta(S)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(S)} t^{g(S)}, \tag{7}$$

где $\sigma(l)$ — индекс самопересечения (self-writhe) [6] диаграммы $l$.

Построенный полином от двух переменных $X(l)(a, t)$ представляет собой изотопический инвариант неориентированных двоякопериодических плетений в $\mathbb{R}^3$.

4. В таблице представлены вычисленные по формуле (7) полиномиальные инварианты некоторых простейших 2-структур.

| | | |
|---|---|---|
| a) |  | $X = a^{-2} + a^2 + 2t^2,$ |
| b) |  | $X = (a^4 + a^6 - a^{10})t,$ |
| c) |  | $X = -(a^{-6} + a^{-4} - a^{-2} - 3 - a^2 + a^4 + a^6)t,$ |
| d) |  | $X = -(a^{-14} + a^{-12} - a^{-10} - 2a^{-8} + 2a^{-4} - 3 - a^2 + a^4 + a^6)t,$ |
| e) |  | $X = (a^{-9} - 3a^{-5} - 2a^{-3} + 2a^{-1} + 2a - 2a^3 - 3a^5 + a^9)t,$ |
| f) |  | $X = a^{-10} - 5a^{-6} + 3a^{-2} + 3a^2 - 5a^6 + a^{10} +$<br>$+(a^{-12} - 2a^{-8} - 3a^{-4} + 8 - 3a^4 - 2a^8 + a^{12})t^2$ |

Полиномиальный инвариант $X(l)(a,t)$ может быть использован для построения топологической классификации двоякопериодических плетений, а также для изучения структурных свойств текстильных материалов. Еще одна область возможного применения этого инварианта — теория двумерных решеточных моделей статистической физики.

Авторы признательны профессору Э.А. Троппу за полезные замечания.

## Список литературы

[1] *Jones V.F.R.* // Pacific J. Math. 1989. V. 137. N 2. P. 311–334.
[2] *Kauffman L.H.* // Amer. Math. Monthly. 1988. V. 95. N 3. P. 195–242.
[3] *Wu F.Y.* // Rev. of Mod. Phys. 1992. V. 64. N 4. P. 1099–1131.
[4] *Бэкстер Р.* Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985. 486 с.
[5] *Прасолов В.В., Сосинский А.Б.* Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997. 352 с.
[6] *Bollobás B., Pebody L., Weinreich D.* A state space definition of the HOMFLY invariant, in: Contemporary Combinatorics, Bolyai Society Mathematical Studies. V. 10. Chap. 4. Springer, 2002. 302 p.