

05

## Об изменении коэффициента самодиффузии при вариации изотопного состава кристалла

© М.Н. Магомедов

Институт проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН,  
Махачкала  
E-mail: mahmag@iwt.ru

В окончательной редакции 14 декабря 2005 г.

Определено изменение диффузионных параметров при изменении изотопного состава кристалла как для области высоких, так и для области низких температур. Расчеты проведены для кристаллов алмаза и ОЦК лития. Показано, что изотопная зависимость коэффициента самодиффузии в области высоких температур незначительна, но при переходе к низким температурам становится весьма существенной. Коэффициент самодиффузии при  $T = 0$  при переходе от  ${}^7\text{Li}$  к  ${}^6\text{Li}$  возрастает на порядок, а при переходе от  ${}^{12}\text{C}$  к  ${}^{13}\text{C}$  уменьшается на три порядка. Этот эффект связан с квантовым туннелированием при  $T = 0$  и обусловлен наличием у атомов „нулевых колебаний“. Показано, что изотопная зависимость параметров межатомного потенциала оказывает заметное влияние на коэффициент самодиффузии только в области высоких температур.

PACS: 66.30.-h

Зависимость коэффициента самодиффузии  $D$  в кристалле от массы диффундирующего изотопа  $m$  изучается уже давно. При этом предполагается, что изменение массы изотопа влияет только на величину предэкспоненциального множителя  $D_0$  в зависимости Аррениуса:  $D_0 \sim m^{1/2}$ . В этом случае легко получить [1–3]:

$$\begin{aligned} L_D &= -\partial \ln D / \partial \ln m = -\partial \ln D_0 / \partial \ln m \\ &= -\partial \ln D_0^*(X) / \partial \ln m^*(X) = 1/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь, так же как и в работах [4,5], использованы обозначения:  $X = [{}^{k+1}\text{A}] / [{}^k\text{A} + {}^{k+1}\text{A}]$  — атомная концентрация тяжелого изотопа,  $[{}^{k+1}\text{A}]$  — количество тяжелого изотопа в кристалле, состоящем как

из  $[{}^k\text{A}]$ , так и из  $[{}^{k+1}\text{A}]$  изотопов. Функция со звездочкой  $F^*(X)$  представляет собой приведенное значение, определяемое выражением:  $F^*(X) = [F(X)/F(X=0)]$ , где  $F(X)$  — величина, соответствующая кристаллу с изотопным составом, равным  $X$ ,  $F(X=0)$  — величина, соответствующая изотопно-чистому кристаллу, где  $X=0$ . Таким образом, поскольку атомные массы изотопов (в атомных единицах массы) связаны соотношением:  $m[{}^{k+1}\text{A}] \cong m[{}^k\text{A}] + 1 - \delta$ , то приведенная величина средней (по всем атомам кристалла) массы атома равна:

$$\begin{aligned} m^* &= \{(1-X)m[{}^k\text{A}] + Xm[{}^{k+1}\text{A}]\}/m[{}^k\text{A}] \\ &= \{m[{}^k\text{A}] + X(1-\delta)\}/m[{}^k\text{A}] = 1 + \Delta_m X, \end{aligned}$$

где  $\delta$  — дефект массы для ядра изотопа,  $\Delta_m = (1-\delta)/m[{}^k\text{A}] \cong 1/m[{}^k\text{A}]$ . При этом предполагается, что аргумент  $X$  изменяется непрерывно в интервале  $0 \leq X \leq 1$ .

Несмотря на то, что уже давно получены экспериментальные результаты, свидетельствующие о том, что  $L_D > 1/2$  [1–3], причина этого до конца не ясна. Анализу этого вопроса и посвящена данная работа.

В работе [6] было получено выражение для коэффициента самодиффузии в объеме кристалла простого вещества:

$$D = D_d x_d; \quad D_d = f_c (c/k_y^{1/3})^2 k_b \Theta / 8\pi \hbar, \quad (2)$$

где  $k_y$  — коэффициент упаковки структуры,  $k_b$  и  $\hbar$  — постоянные Больцмана и Планка,  $c = (6k_y/\pi\rho)^{1/3}$  — расстояние между центрами ближайших атомов в кристалле,  $\rho = N/V$  — плотность числа атомов,  $V$  и  $N$  — объем кристалла и число атомов в нем,  $\Theta$  — температура Дебая. Величина  $f_c$  — это „фактор корреляции“, определяемый структурой кристалла [2,3]:  $f_c \approx [1 - (1/k_n)]^2 \approx 1 - 2/k_n$ , где  $k_n$  — первое координационное число. Функция  $x_d(\rho, T)$  представляет собой долю атомов, находящихся в делокализованном состоянии (т.е. имеющих кинетическую энергию выше некоторого порогового значения  $E_d$ ), и имеет вид

$$x_d(\rho, T) = N_d(\rho, T)/N = (2/\pi^{1/2}) \int_{E_d/k_b T}^{\infty} t^{1/2} \exp(-t) dt. \quad (3)$$

Выражение для энергии делокализации  $E_d$ , полученное в работах [6,7] для эйнштейновской модели кристалла, имеет вид

$$E_d = E_d(1)f_y, \quad E_d(1) = (3/8)k_y^{-2/3}m(3ck_b\Theta/4\pi\hbar)^2, \quad (4)$$

$$f_y = (2/y)[1 - \exp(-y)]/[1 + \exp(-y)], \quad y = 3\Theta/4T,$$

где  $E_d(1)$  — энергия делокализации при  $f_y = 1$ .

В работах [7–9] было показано, что выражение (4) хорошо объясняет все известные эвристические взаимосвязи энергии самодиффузии с другими параметрами кристалла. В работе [10] показано, что соотношения (2)–(4) применимы при низких температурах, вплоть до  $T = 0$ . Как показали результаты вычислений, при высоких температурах ( $T \gg \Theta$ ) величина  $E_d$  практически совпадает с экспериментально определяемой энтальпией самодиффузии [6,9]. Как показано в работах [9,10], множитель  $f_y$  описывает переход от „классической“ высокотемпературной диффузии (где  $f_y \approx 1$  и функция  $E_d$  не зависит от  $T$ ) к „квантовой“ низкотемпературной диффузии, где  $f_y \approx 8T/3\Theta$ , а функция  $E_d/k_bT$  при  $T \rightarrow 0$  стремится к величине  $0.128/\Lambda k_y^{2/3}$ , где  $\Lambda$  — параметр де Бюра:  $\Lambda \cong (a_0/c)^2$ . Здесь  $a_0$  — амплитуда „нулевых колебаний“: для модели Дебая  $a_0 = (9\hbar^2/4mk_b\Theta)^{1/2}$ .

Как показано в работах [6,9], вплоть до температуры плавления  $T_m$  для большинства веществ выполняется условие:  $F_d \gg k_bT_m$ . Поэтому функцию  $x_d$  (3) можно аппроксимировать формулой аррениусовского типа:

$$x_d = 2(E_d/\pi k_bT)^{1/2} \exp(-E_d/k_bT) + \operatorname{erfc}[(E_d/k_bT)^{1/2}]$$

$$\cong 2(E_d/\pi k_bT)^{1/2} \exp(-E_d/k_bT). \quad (5)$$

Представим парное взаимодействие атомов в кристалле в виде потенциала Ми–Леннарда–Джонса [11–13]

$$\varphi(r) = [\varepsilon/(b-a)][a(r_0/r)^b - b(r_0/r)^a].$$

Здесь  $\varepsilon$  и  $r_0$  — глубина и координата минимума потенциальной ямы,  $b$  и  $a$  — параметры, характеризующие жесткость и дальное действие потенциала.

В работе [4] показано, что если в кристалле энергия „нулевых колебаний“ много меньше энергии межатомной связи, то параметры  $b$  и

$a$  можно считать независимыми от изотопного состава. Для параметров же  $\varepsilon$  и  $r_0$ , а также для расстояния между центрами ближайших атомов и температуры Дебая получено:

$$\varepsilon^*(X) = (1 + \Delta_B X)(1 - \Delta_C X)^3, \quad c^*(X) \text{ или } r_0^*(X) = 1 - \Delta_C X,$$

$$\Theta^*(X) \cong [\varepsilon^*/(r_0^*)^2 m^*]^{1/2} = [(1 + \Delta_B X)(1 - \Delta_C X)/(1 + \Delta_m X)]^{1/2}, \quad (6)$$

где величины  $\Delta_C$  и  $\Delta_B$  определяют изотопную зависимость межатомного расстояния и модуля упругости в линейном по величине  $X$  приближении:  $B^*(X) = 1 + \Delta_B X$ .

Исходя из (4) и (6), для изотопной зависимости энергии делокализации можно получить:

$$E_d^*(X) = m^*(X) [c^*(X) \Theta^*(X)]^2 f_y^*(X). \quad (7)$$

Так как при  $T/\Theta \rightarrow \infty$   $f_y \rightarrow 1$ , а при  $T/\Theta \rightarrow 0$   $f_y \approx 8T/3\Theta \rightarrow 0$ , то для приведенного значения  $f_y^*(X)$  можно принять:

$$f_y^*(X) = f_y(X)/f_y(0) = \begin{cases} 1/\Theta^*(X) & \text{при низких температурах } (T \ll \Theta) \\ 1 & \text{при высоких температурах } (T \gg \Theta) \end{cases} = [\Theta^*(X)]^{-z}, \quad (8)$$

где параметр  $z$  может принимать два значения:  $z = 1$  при  $T \ll \Theta$  и  $z = 0$  при  $T \gg \Theta$ .

Тогда из (6)–(8) для  $E_d^*(X)$  получим изотопную зависимость вида

$$E_d^*(X) \cong (m^*)^{z/2} (c^*)^{3-z/2} (B^*)^{1-z/2} \cong 1 + [(z/2)\Delta_m - (3-z/2)\Delta_C + (1-z/2)\Delta_B] X. \quad (9)$$

Отсюда легко видеть, что энергия самодиффузии при высоких температурах не будет иметь изотопной зависимости (как это обычно и полагают при получении (1)) только при условии:  $3\Delta_C = \Delta_B$  или  $\Delta_C = 0$  и  $\Delta_B = 0$ . Порядок данных величин для алмаза и лития представлен в табл. 1. Именно тот факт, что  $\Delta_m$ ,  $\Delta_C$  и  $\Delta_B \ll 1$ , и обосновывает использование как в (9), так и в дальнейшем „линейного приближения“ вида:  $(1 + \chi^k \cong 1 + k\chi)$  при  $\chi \ll 1$ .

**Таблица 1.** Изменение диффузионных параметров при вариации изотопного состава кристалла. Значения структурных констант: для алмаза  $k_y = 0.3401$ ,  $f_c = 0.5$ , для ОЦК лития  $k_y = 0.6802$ ,  $f_c = 0.72722$  [2,3]. Расчеты выполнены по указанным (в скобках) формулам при  $X = 1$

Диффундирующий изотоп	$\Delta_C$ , $10^{-4}$	$\Delta_B$ , $10^{-4}$	$\ln \Theta^*$ , $10^{-4}$ (10)	$\ln D_d^*$ , $10^{-4}$ (10)	$\ln E_d(1)^*$ , $10^{-4}$ (10)	$\Theta^{[kA]}$ , К	$\Theta^{[k+1A]}$ , К	$D_d^{[kA]}$ , $10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ (2)	$D_d^{[k+1A]}$ , $10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ (2)	$E_d(1)^{[kA]}$ , eV (4)	$E_d(1)^{[k+1A]}$ , eV (4)
$^{13}\text{C}$ в $^{12}\text{C}$ $\Delta_m = 0.0833$ $c = 0.1544 \text{ nm}$ [14]	1.5 [5]	15 [5]	-409.75	-412.75	10.5	2230	2140.47	2.842 $^{12}\text{C}$	2.727	11.085 eV = = 128629 K $^{12}\text{C}$	11.097
	0	0	-416.5	-416.5	0	$^{12}\text{C}$ [14]	2139.03		2.726		11.085
$^7\text{Li}$ в $^6\text{Li}$ $\Delta_m = 0.1667$ $c = 0.3023 \text{ nm}$ [14]	5.0 [15]	200 [4]	-736	-746	185	370.27	344	1.659	1.540	0.3648	0.3716 eV = = 4312.2 K $^7\text{Li}$
	0	0	-833.5	-833.5	0	373.90	$^7\text{Li}$ [14]	1.674	$^7\text{Li}$	0.3716	

Исходя из (2), (5) и (6), для изотопных зависимостей функций  $D_d$  и  $x_d$  имеем выражения:

$$D_d^* = (m^*)^{-1/2}(c^*)^{5/2}(B^*)^{1/2} \cong 1 - (1/2)(\Delta_m + 5\Delta_C - \Delta_B)X,$$

$$x_d^* = E_d^* \exp\{-[E_d(0)/k_bT](E_d^* - 1)\}.$$

Здесь  $E_d(0)$  — энергия активации самодиффузии в изотопно-чистом кристалле, где  $X = 0$ .

Используя (9) и учитывая, что  $(1/2)[\Delta_m + 5\Delta_C - \Delta_B] \ll 1$ , в „линейном приближении“ получим следующие изотопные зависимости:

$$\begin{aligned} \ln \Theta^* &\cong -(1/2)[\Delta_m + \Delta_C - \Delta_B]X, \\ \ln D_d^* &\cong -(1/2)[\Delta_m + 5\Delta_C - \Delta_B]X, \quad \ln E_d(1)^* \cong [\Delta_B - 3\Delta_C]X, \\ \ln x_d^* &\cong -[\Delta_B - 3\Delta_C + (z/2)(\Delta_m + \Delta_C - \Delta_B)]\{[E_d(0)/k_bT] - (1/2)\}X, \\ \ln D^* &\cong -(1/2)[\Delta_m - 2\Delta_B + 8\Delta_C - (z/2)(\Delta_m + \Delta_C - \Delta_B)]X \\ &\quad - [E_d(0)/k_bT][\Delta_B - 3\Delta_C + (z/2)(\Delta_m + \Delta_C - \Delta_B)]X. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда легко получить выражения:

$$L_D(T) \cong -(1/\Delta_m)(\partial \ln D^*/\partial X) = 1/2 + R_D(T)/\Delta_m. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} R_D(T) &= [E_d(0)/k_bT][\Delta_B - 3\Delta_C + (z/2)(\Delta_m + \Delta_C - \Delta_B)] \\ &\quad - [\Delta_B - 4\Delta_C + (z/4)(\Delta_m + \Delta_C - \Delta_B)]. \end{aligned}$$

В случае высоких (при  $z = 0$ ) и низких (при  $z = 1$ ) температур имеем:

$$R_D(T) = [E_d(0)/k_bT](\Delta_B - 3\Delta_C) - \Delta_B + 4\Delta_C, \quad (12)$$

$$R_D(0) = (M_d/2)(\Delta_m + \Delta_B - 5\Delta_C) - (1/4)(\Delta_m + 3\Delta_B - 15\Delta_C).$$

Здесь введен параметр  $M_d$ , представляющий собой предельное отношение [10]:

$$M_d = \lim_{T/\Theta \rightarrow 0} (E_d/k_bT) = 8E_d(1)/3k_b\Theta. \quad (13)$$

Легко показать, что  $M_d = [9/(8\pi k_y^{1/3})]^2 \Lambda^{-1}$ . Таким образом, функция  $x_d(0)$  определяет вероятность квантового туннелирования, которая имеет величину  $\sim \exp(-1/\Lambda)$ . Следовательно, даже при  $T = 0$  К коэффициент самодиффузии отличен от нуля. Этот эффект обусловлен наличием у атомов „нулевых колебаний“ и предсказывался еще в работе [16]. Отметим, что в „классическом пределе“ (т.е. при  $\hbar \rightarrow 0$  или  $\Lambda \rightarrow 0$ ) из формул (2), (3), (5) и (13) следует:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow 0 \text{ К}} D(T) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} D(0) = \lim_{M_d \rightarrow \infty} D(0) = 0. \quad (14)$$

Это указывает на то, что процесс самодиффузии при  $T = 0$  К обусловлен (как и наличие „нулевых колебаний“) квантовыми эффектами.

В табл. 1 представлены результаты расчетов изменения температуры Дебая, множителя  $D_d$  и энергии самодиффузии при переходе от кристалла из изотопов  $^{12}\text{C}$  или  $^7\text{Li}$  к кристаллу из изотопов  $^{13}\text{C}$  или  $^6\text{Li}$ . При этом в первой строке представлены результаты расчетов с учетом величин  $\Delta_m$ ,  $\Delta_C$  и  $\Delta_B$ , а во второй — при  $\Delta_C = \Delta_B = 0$ . Легко видеть, что величина  $D_d$  и особенно  $E_d(1)$  изменяются незначительно. Поэтому, взяв величину  $E_d(1)$  для кристаллов из  $^{12}\text{C}$  или  $^7\text{Li}$  и известную из опыта температуру плавления этих кристаллов, мы рассчитали изменение доли делокализованных атомов  $x_d(T_m)$  и коэффициента самодиффузии  $D(T_m)$  при высоких температурах (табл. 2). Как видно из табл. 2, разница этих параметров в кристаллах разных изотопов незначительна, хотя величина  $L_D(T_m)$  при учете значений  $\Delta_C$  и  $\Delta_B$  заметно больше чем  $1/2$ , особенно для более легкого лития.

Но картина кардинально меняется при переходе в область низких температур. В табл. 3 представлены результаты расчета изменения величин  $x_d(T=0)$  и  $D(T=0)$  при переходе от кристалла из изотопов  $^{12}\text{C}$  или  $^7\text{Li}$  к кристаллу из  $^{13}\text{C}$  или  $^6\text{Li}$ . Здесь коэффициенты самодиффузии различаются очень сильно: на три порядка для алмаза и на порядок для ОЦК лития. При этом величина  $L_D(T_m)$  как при учете, так и без учета  $\Delta_C$  и  $\Delta_B$  значительно превышает  $1/2$ .

Физический смысл функции  $R_D(T)$  из (11) легко понять из следующего соотношения, которое получается при использовании „линейного приближения“:

$$D^*(X) \cong 1 + (\partial \ln D^* / \partial X)_{X=0} X = 1 - \Delta_D X,$$

где коэффициент, определяющий изотопное смещение относительного коэффициента самодиффузии с ростом  $X$ , равен  $\Delta_D = (\Delta_m/2) + R_D(T)$ .

**Таблица 2.** Изменение диффузионных параметров при вариации изотопного состава кристалла в области высоких температур ( $T \gg \Theta$ ,  $z = 0$ ,  $T = T_m$ ). Расчеты выполнены по указанным (в скобках) формулам при  $X = 1$

Диффундирующий изотоп	$T_m, K$ [17]	$E_d(1)/k_b T_m$ (4)	$\ln x_d^*(T_m)$ (10)	$\ln D^*(T_m)$ (10)	$R_D(T_m)$ (12)	$L_D(T_m)$ (11)	$x_d(T_m)[^k A]$ , (5)	$x_d(T_m)[^{k+1} A]$ , (5)	$D(T_m)[^k A]$ , $cm^2/s$ (2)	$D(T_m)[^{k+1} A]$ , $cm^2/s$ (2)
$^{13}C$ в $^{12}C$	4100	31.373	-0.0324	-0.0737	0.032	0.885	$1.5 \cdot 10^{-13}$	$1.45 \cdot 10^{-13}$	$4.26 \cdot 10^{-16}$	$3.96 \cdot 10^{-16}$
	$^{12}C$	$^{12}C$	0	-0.0417	0	0.5	$^{12}C$	$1.5 \cdot 10^{-13}$	$^{12}C$	$4.08 \cdot 10^{-16}$
$^7Li$ в $^6Li$	454	9.498	-0.1665	-0.2411	0.158	1.446	$3.08 \cdot 10^{-4}$	$2.61 \cdot 10^{-4}$	$5.11 \cdot 10^{-7}$	$4.02 \cdot 10^{-7}$
	$^7Li$	$^7Li$	0	-0.0834	0	0.5	$2.61 \cdot 10^{-4}$	$^7Li$	$4.36 \cdot 10^{-7}$	$^7Li$

**Таблица 3.** Изменение диффузионных параметров при вариации изотопного состава кристалла в области низких температур ( $T = 0$ ,  $z = 1$ ). Расчеты выполнены по указанным (в скобках) формулам при  $X = 1$

Диффундирующий изотоп	$M_d[^k A]$ (13)	$M_d[^{k+1} A]$ (13)	$x_d(0)[^k A]$ (5)	$x_d(0)[^{k+1} A]$ (5)	$\ln x_d^*(0)$	$D(0)[^k A]$ , $cm^2/s$ (2)	$D(0)[^{k+1} A]$ , $cm^2/s$ (2)	$\ln D^*(0)$	$R_D(0)$ (12)	$L_D(0)$ (11)
$^{13}C$ в $^{12}C$	153.82	160.42	$2.2 \cdot 10^{-66}$	$3.06 \cdot 10^{-69}$	-6.581	$6.28 \cdot 10^{-69}$	$8.35 \cdot 10^{-72}$	-6.62	6.443	77.85
	$^{12}C$	160.36	$^{12}C$	$3.25 \cdot 10^{-69}$	-6.521	$^{12}C$	$8.87 \cdot 10^{-72}$	-6.56	6.386	77.16
$^7Li$ в $^6Li$	30.49	33.42	$3.6 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-14}$	-2.895	$5.94 \cdot 10^{-16}$	$3.05 \cdot 10^{-17}$	-2.97	2.753	17.02
	30.76	$^7Li$	$2.8 \cdot 10^{-13}$	$^7Li$	-2.632	$4.61 \cdot 10^{-16}$	$^7Li$	-2.71	2.522	15.63

При этом первое слагаемое от температуры не зависит, а второе сильно зависит от температуры, уменьшаясь с ростом  $T$  от значения  $R_D (T = 0) \gg 1$  до нуля при  $T \rightarrow \infty$ . Очевидно, что этот множитель необходимо учитывать при определении коэффициента самодиффузии методами, основанными на использовании радиоактивных изотопов [1,3] в области низких температур.

Автор благодарит А.Д. Филенко, К.Н. Магомедова и З.М. Сурхаеву за полезные дискуссии и всестороннюю помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Отделения ЭММПУ РАН (контракт № ИПГ-06-ОЭ).

## Список литературы

- [1] Герцикен С.Д., Дехтяр И.Я. Диффузия в металлах и сплавах в твердой фазе. М.: ГИФМЛ, 1960. С. 118, 173.
- [2] Manning J.R. Diffusion Kinetics for Atoms in Crystals. Toronto: D. Van Nostrand Comp., 1968. (Пер.: Маннинг Дж. Кинетика диффузии атомов в кристаллах. М.: Мир, 1971. С. 148, 150, гл. 3).
- [3] Бокштейн Б.С. Диффузия в металлах. М.: Metallurgy, 1978. С. 32, 61, 105, 116, 117.
- [4] Магомедов М.Н. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 9. С. 50–57.
- [5] Плеханов В.Г. // УФН. 2003. Т. 173. № 7. С. 711–738.
- [6] Магомедов М.Н. // Физика металлов и металловедение. 1995. Т. 80. № 4. С. 36–50.
- [7] Магомедов М.Н. // Физика металлов и металловедение. 1992. № 10. С. 13–16.
- [8] Магомедов М.Н. // Теплофизика высоких температур. 1993. Т. 31. № 5. С. 731–734.
- [9] Магомедов М.Н. // Расплавы. 2005. № 1. С. 59–70.
- [10] Магомедов М.Н. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 10. С. 64–71.
- [11] Hirschfelder J.O., Curtiss Ch.F., Bird B.V. Molecular Theory of Gases and Liquids. N.Y.: J. Wiley and Sons, 1954. (Пер.: Гирифельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 931 с.).
- [12] Moelwyn-Hughes E.A. Physical Chemistry. London: Pergamon Press, 1961. (Пер.: Мелвин-Хьюз Э.А. Физическая химия. В 2-х т. М.: Изд-во иностр. лит., 1962).

- [13] Магомедов М.Н. // Журнал физической химии. 1988. Т. 62. № 8. С. 2103–2108.
- [14] Kittel Ch. Introduction to solid state physics / 5<sup>th</sup> ed. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1976. (Пер.: Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 792 с.).
- [15] Громницкая Е.Л., Стальгорова О.В., Стишов С.М. // Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 69. № 1. С. 36–40.
- [16] Андреев А.Ф., Лифшиц И.М. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. № 6. С. 2057–2068.
- [17] Шапиронов М.И. Введение в современную теорию растворов. М.: Высш. шк., 1976. 296 с.