

02;09

Высокая размерность хаотических аттракторов в гиротроне с нефиксированной структурой поля

© Е.В. Блохина, С.П. Кузнецов, А.Г. Рожнев

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: BlokhinaEV@yandex.ru

Поступило в Редакцию 5 декабря 2005 г.

Представлены результаты численного исследования динамики гиротрона с нефиксированной структурой поля. Вычислены показатели Ляпунова для аттракторов хаотических режимов и проведена оценка их размерностей на основании формулы Каплана–Йорке. Значения размерностей оказываются аномально большими, и этот факт связан с присутствием большого числа высокодобротных собственных мод в резонаторе гиротрона вследствие работы вблизи критической частоты электродинамической системы.

PACS: 84.40.Ik

Как известно, одно из основных свойств динамического хаоса заключается в присутствии экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий [1–3]. Для количественной характеристики этой неустойчивости используются вычисления показателей Ляпунова для аттрактора рассматриваемой системы. В случае системы с N -мерным фазовым пространством имеется спектр из N показателей Ляпунова, среди которых положительные и отрицательные определяют соответственно экспоненциальный рост или затухание возмущений вблизи принадлежащих аттрактору типичных траекторий. Для хаотических аттракторов характерно присутствие одного или более положительных показателей.

Анализ спектра показателей Ляпунова широко применяется для исследования сложной динамики в системах обыкновенных дифференциальных уравнений и в моделях с дискретным временем (отображения). В последнее время идеи и методы нелинейной динамики активно привлекаются для исследования распределенных систем электронно-волновой природы, таких как лампа обратной волны, гиротроны, генераторы с запаздывающей обратной связью на основе ламп бегущей волны

и клистронов. Сейчас надежно установлено, что при определенном выборе параметров в этих устройствах могут реализоваться одночастотные, многочастотные и хаотические колебания. Для их исследования и наглядного представления результатов обычно используют построение временных реализаций, спектров, фазовых портретов, бифуркационных диаграмм. Представляется весьма уместным и целесообразным уделить внимание анализу показателей Ляпунова для таких систем, что должно дать более глубокую информацию о природе наблюдаемых режимов.

Системы, о которых идет речь, являются распределенными (бесконечномерными), поэтому количество показателей Ляпунова в спектре, формально говоря, должно быть бесконечно большим. С практической точки зрения, значимым является их ограниченное подмножество — это набор расположенных в порядке убывания показателей в количестве, позволяющем определить размерность соответствующего аттрактора по известной формуле Каплана–Йорке (так называемая ляпуновская размерность) [1–3].

К настоящему времени известно несколько работ, использующих показатели Ляпунова в контексте исследования нелинейной динамики электронно-волновых устройств. Исторически первой была работа [4], где рассматривались хаотические автоколебания в лампе обратной волны. Было показано в численных расчетах и в эксперименте, что хаос в этой электронно-волновой системе ассоциируется с присутствием неустойчивости динамики по отношению к малым возмущениям начальных условий, и получены оценки старшего показателя Ляпунова. В работе [5] было проведено вычисление нескольких показателей Ляпунова для модели лампы обратной волны и дана оценка размерности аттракторов, отвечающих хаотическим режимам. Установлено, что в зависимости от величины тока пучка в системе могут реализовываться хаотические режимы с одним положительным показателем („слабый“ хаос) и с несколькими положительными показателями (развитый хаос или гиперхаос). В статье [6] обсуждается хаотическая динамика в генераторе на основе лампы бегущей волны и приводится оценка нескольких показателей Ляпунова.

Результаты исследования гиротрона с нефиксированной структурой продольного поля на основе численного решения уравнений, описывающих его нелинейную динамику, впервые были представлены в работе [7], причем была выявлена возможность возникновения автомодуляционных режимов. Нестационарное моделирование гиротрона

в широкой области параметров было проведено в работе [8]. В недавних экспериментах (см., например, [9,10]) автомодуляционные режимы были практически реализованы в гиротроне при введении запаздывающей обратной связи. В работе [11] на основании результатов численного моделирования было показано, что переход к хаотическим колебаниям может происходить по двум различным сценариям — через последовательность бифуркаций удвоения периода и через разрушение квазипериодического движения.

В настоящей статье мы представим и обсудим результаты вычисления спектров показателей Ляпунова для хаотических режимов, а также оценки ляпуновской размерности аттракторов по формуле Каплана–Йорке. В отличие от электронных систем типа лампы обратной волны, для гиротрона, который функционирует вблизи критической частоты электродинамической структуры, оказывается характерным присутствие большого числа малых по абсолютной величине показателей Ляпунова. Это связано с наличием большого числа относительно высокочастотных собственных мод электродинамической структуры и приводит к несколько неожиданному заключению о весьма высокой размерности хаотических аттракторов, намного большей, нежели для исследованных ранее примеров электронно-волновых систем.

Будем рассматривать нестационарные режимы гиротрона с нефиксированной структурой поля на основе численного решения системы уравнений [7]:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - i \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi_0,$$

$$\frac{dp}{dx} + ip(|p|^2 + \Delta - 1) = iF, \quad p|_{x=0} = e^{i\varphi_0}, \quad \varphi_0 \in [0, 2\pi], \quad (1)$$

записанной с использованием безразмерных переменных и параметров. Функция $F(x, t)$ характеризует мгновенное продольное распределение комплексной амплитуды высокочастотного поля, p — поперечный импульс электронов, Δ — параметр рассинхронизма циклотронной частоты и критической частоты рабочей моды волновода, I_0 — параметр тока пучка. Уравнения взаимодействия дополняются начальными условиями для поля $F(x, 0) = F_0(x)$.

Пусть во входном сечении задано граничное условие полного отражения, т.е. поле здесь равно нулю: $F(0, t) = 0$. На коллекторном

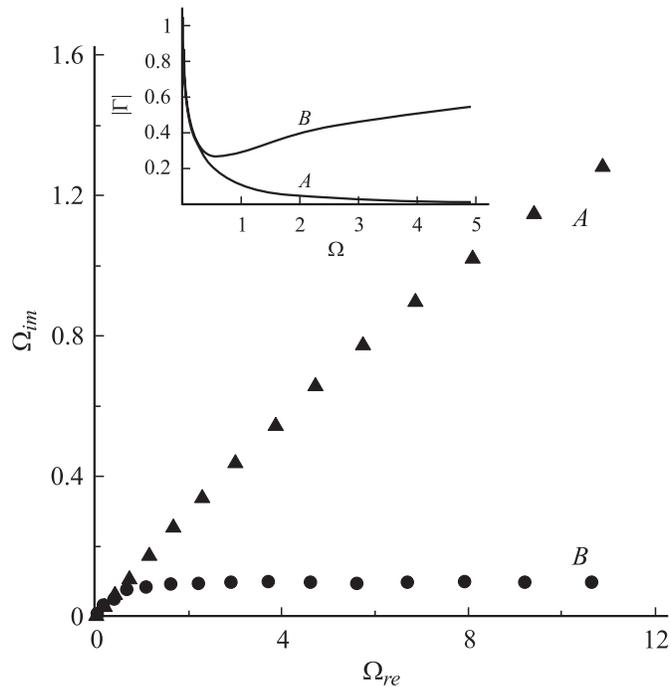


Рис. 1. Частоты линейных мод „холодной“ системы на комплексной плоскости $(\Omega_{re}, \Omega_{im})$: A — для граничных условий A , B — для граничных условий B в выходной плоскости волновода. На вставке показана зависимость модуля коэффициента отражения от частоты для этих граничных условий.

конце, как будем полагать, имеется рупор с малым углом раскрыва. Для такого случая адекватная форма граничного условия была установлена в работе [12]. В этом случае модуль коэффициента отражения как функция частоты плавно убывает (см. вставку на рис. 1, кривая A). В качестве альтернативного варианта, для типичной геометрии резонатора гиротрона можно использовать приближенные граничные условия, для которых зависимость модуля коэффициента отражения от частоты дается кривой B на рис. 1.¹

¹ Далее для краткости граничные условия для рупора, соответствующие зависимостям A и B на рис. 1, будем обозначать как граничные условия типа A и B соответственно.

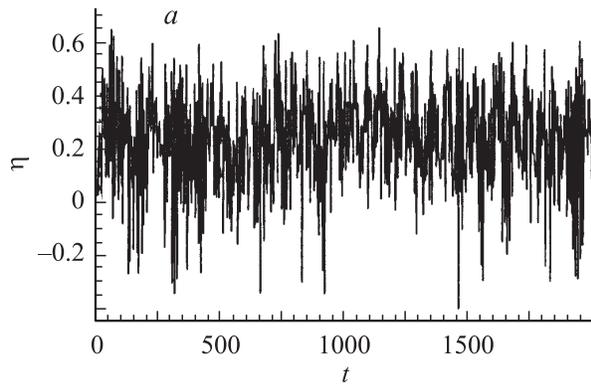


Рис. 2. Зависимость электронного поперечного КПД на коллекторном конце системы $\eta_{\perp} = 1 - 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} |p|^2 d\varphi_0$ от времени (a), фазовый портрет, восстановленный по этой зависимости (b) и спектр поля в выходном сечении (c) для режима „развитого“ хаоса, $\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.15$, в выходном сечении используются граничные условия B .

В работе [11] была получена карта режимов на плоскости основных параметров системы (Δ, I_0) , где найдены области различного типа генерации — стационарные режимы, автомодуляция, хаос.

Было показано, что помимо хаоса, характеризующегося одним положительным показателем Ляпунова („слабый“ хаос), в гиротроне могут реализоваться режимы с несколькими положительными показателями — режимы развитого хаоса или гиперхаоса [13].

На рис. 2, a–c представлены графики, иллюстрирующие режим гиперхаоса, наблюдаемый при численном решении уравнений (1) с граничными условиями B . Первая диаграмма показывает зависимость от времени электронного КПД $\eta(t)$, который рассчитывается по величинам поперечного импульса электронов на коллекторном конце системы. Вторая диаграмма изображает фазовый портрет, построенный с использованием переменной $\eta(t)$ в текущий и запаздывающий моменты времени. Третья диаграмма показывает спектр, полученный посредством фурье-анализа комплексной амплитуды поля выходного сигнала гиротрона. По сравнению со „слабым“ хаосом, для гиперхаоса характерен сплошной спектр колебаний, более однородный в смысле

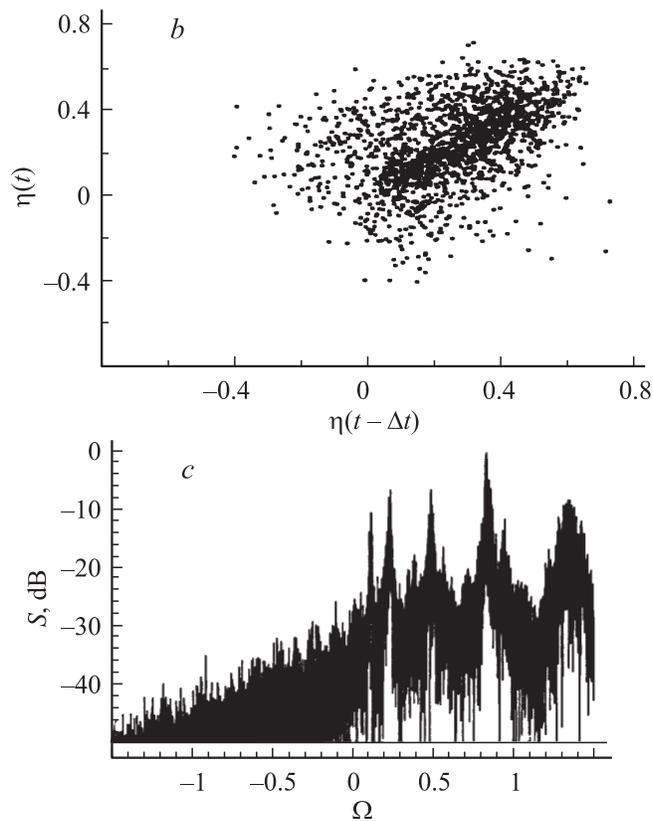


Рис. 2 (продолжение).

распределения мощности по диапазону частот, а также вид фазового портрета, характеризующийся отсутствием видимой выраженной структуры.

Для вычисления спектра показателей Ляпунова был использован алгоритм Бенеттина [1–3], адаптированный для распределенной электронно-волновой системы, как описано в работе [5]. Для получения N показателей производится численное решение $N + 1$ комплектов систем уравнений (1) с граничными условиями A и B , в которых в качестве начальных условий для поля задаются близкие комплексные

функции $F_n(x) = F(x) + \varepsilon \tilde{F}_n(x)$, где $\tilde{F}_n(x)$ по норме равно 1, а ε — малая величина. На каждом шаге решения по времени $\Delta\tau$ полученные возмущения подвергаются ортогонализации и нормализации по алгоритму Грама–Шмидта. При этом в ходе вычислений каждый раз подсчитываются N величин S_n , представляющих собой накапливающиеся суммы и показывающих, на сколько изменяется норма каждого n -го возмущения за M шагов алгоритма. По этим суммам оцениваются показатели Ляпунова Λ_n :

$$S_n = \sum_{i=1}^M \ln \|\tilde{F}_n(t = i \cdot \Delta\tau)\|, \quad \Lambda_n = S_n / M \Delta\tau. \quad (2)$$

Для получения более точной оценки можно аппроксимировать график временной зависимости накапливающейся суммы (2) прямой линией, применяя метод наименьших квадратов; при этом величина Λ_n получается как угловой коэффициент данной прямой.

Если известно достаточное количество показателей Ляпунова, то можно оценить ляпуновскую размерность аттрактора по формуле Каплана–Йорке [3]

$$D = m + \frac{\sum_{i=1}^m \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|}, \quad (3)$$

где m — такое число, что $\sigma_m = \sum_{i=1}^m \Lambda_i > 0$, но уже $\sigma_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} \Lambda_i < 0$. Как известно из многочисленных примеров, обсуждавшихся в литературе по нелинейной динамике, величина, вычисленная по формуле (3), обычно дает хорошую оценку фрактальной размерности аттрактора хаотического режима.

На основе описанной выше процедуры были рассчитаны показатели Ляпунова для нескольких режимов слабого и развитого хаоса в модели гиротрона с граничными условиями A и B .

На рис. 3, *a* показаны графики нескольких первых (неубывающих) накапливающих сумм, полученных в ходе вычисления спектра показателей Ляпунова для режима гиперхаоса. Монотонно нарастающие в среднем зависимости $S_n(t)$ отвечают положительным показателям.

Следует отметить, что у аттракторов данной системы, соответствующих автомодуляционным и хаотическим режимам, обязательно

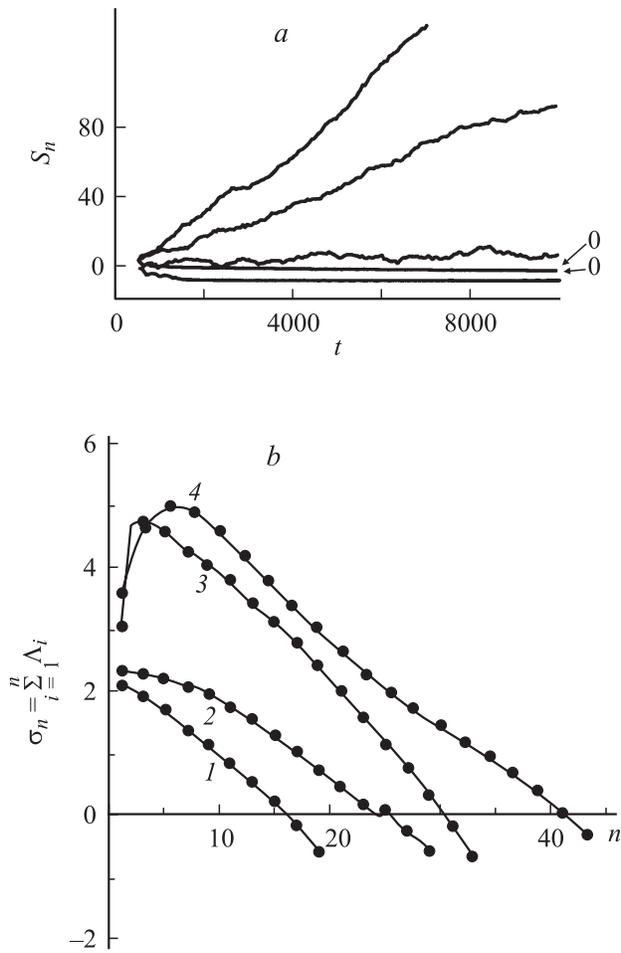


Рис. 3. Графики накапливающихся сумм для режима развитого хаоса ($\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.15$) (а) и зависимости сумм показателей от их числа σ_n (б) для различных режимов: 1, 2 — „слабый“ хаос ($\Delta = 0.0$, $I_0 = 0.0365$ для граничных условий А и $\Delta = 0.0$, $I_0 = 0.038$ для граничных условий В соответственно), 3, 4 — „гиперхаос“ ($\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.11$ для граничных условий А и $\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.15$ для граничных условий В соответственно).

присутствуют, как минимум, два нулевых показателя (возмущения, отвечающие сдвигу решения по фазе или по времени, с течением времени не будут ни нарастать, ни убывать).

На рис. 3, *b* показаны зависимость сумм первых нескольких показателей Ляпунова, занумерованных в порядке убывания, от числа членов суммы. Кривые, отмеченные цифрами от 1 до 4, отвечают следующим ситуациям: (1) и (2) — режимы слабого хаоса при $\Delta = 0.0$, $I_0 = 0.0365$ (граничные условия *A*) и при $\Delta = 0.0$, $I_0 = 0.038$ (граничные условия *B*), (3) и (4) — режимы развитого хаоса при $\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.11$ (граничные условия *A*) и $\Delta = 1.0$, $I_0 = 0.15$ (граничные условия *B*). Точка пересечения каждого графика с осью абсцисс дает оценку ляпуновской размерности аттрактора по формуле Каплана–Йорке.

Рассмотрим результаты оценки размерности для различных режимов. В случае граничных условий *A* для „слабого“ хаоса размерность получается равной примерно $D \approx 16.4$, а в режиме гиперхаоса 30.6. Для граничных условий *B* размерности еще выше, соответственно $D \approx 26.6$ и $D \approx 40.7$.

Для сравнения можно отметить, что оценки размерностей аттракторов для режимов слабого и развитого хаоса в лампе обратной волны [5] составили 3.5 и 6.4. Для ЛБВ с запаздывающей обратной связью авторы работы [6] оценили значение хаотического аттрактора как $2 < D < 3$. Таким образом, размерности аттракторов хаотических режимов в нашей системе оказываются существенно выше, чем размерности, полученные для других электронно-волновых систем. Мы связываем это с тем обстоятельством, что рассматриваемое устройство функционирует вблизи границы полосы пропускания электродинамической структуры.

Чтобы пояснить сделанное утверждение, обратимся временно к анализу холодной системы (без пучка). Если в уравнениях (1) положить $I_0 = 0$, то это отвечает отсутствию пучка. В этом случае тривиальное решение системы уравнений $F(x, t) \equiv 0$ с очевидностью устойчиво.

Представим возмущение поля в холодной системе как суперпозицию собственных линейных мод распределенного резонатора, образованного электродинамической структурой с соответствующими граничными условиями. Каждая мода с течением времени будет затухать по закону $\sim e^{-\Omega_{im,n}t}$, где $\Omega_{im,n}$ — мнимая часть собственной частоты для этой моды. Если вычислять показатели Ляпунова для холодной системы, задавая возмущения тривиального решения, то они должны вести себя по закону $\sim e^{\Lambda_n t}$, затухая к нулю, т.е. $\Lambda_n < 0$. Таким образом, должно иметь место соответствие $\Lambda_n = -\Omega_{im,n}$.

Мнимые части частот Ω_{im} собственных линейных мод и оценки показателей Ляпунова тривиального решения для системы без пучка

n	$-\Omega_{im}$	n	Λ
1	-0.00685	1	-0.0094
2	-0.0259	2	-0.0263
3	-0.05123	3	-0.0522
4	-0.07238	4	-0.0623
5	-0.08451	5	-0.0650
6	-0.09024	6	-0.0801
7	-0.09295	7	-0.0891
8	-0.09431	8	-0.0923
9	-0.09506	9	-0.0984
10	-0.09551	10	-0.0989

В таблице сравниваются величины мнимых частей собственных частот линейных мод, рассчитанных для граничных условий B , и результаты оценки показателей Ляпунова для тривиального решения в холодной системе с помощью используемого нами численного алгоритма. Как можно видеть, имеет место достаточно хорошее соответствие между обеими величинами.

На рис. 1 показано расположение частот собственных линейных мод холодной системы на комплексной плоскости (метки A и B относятся к частотам, рассчитанным для граничных условий A и B соответственно). Из анализа комплексных частот линейных мод можно сделать вывод, что в электродинамической системе присутствует большое число относительно высокочастотных мод колебаний (с малой положительной мнимой частью), которые в присутствии электронного пучка будут с ним слабо связаны.

В случае граничных условий B время затухания таких мод одного порядка и достаточно велико, а время релаксации малого возмущения, случайно возникшего в системе на фоне основных колебаний и содержащего указанные моды, будет по порядку величины совпадать с этим характерным временем. Следовательно, большое число малых по абсолютной величине отрицательных показателей Ляпунова будет присутствовать и в системе с пучком.

В зависимости от типа граничных условий система холодных собственных может быть как относительно высокочастотной (для граничных условий B), так и низкочастотной (для граничных условий A), причем разница в значениях мнимых частей собственных частот высших мод оказывается существенной (см. рис. 1). Поэтому размерность, оцененная для системы с граничными условиями A , получается заметно меньше.

Таким образом, в настоящей работе для хаотических режимов в гиротроне с нефиксированной структурой поля представлены результаты численного расчета показателей Ляпунова и дана оценка размерности аттракторов, соответствующих режимам „слабого“ хаоса и гиперхаоса. Выявлены аномально высокие значения размерности по сравнению с аналогичными оценками, известными для других электронно-волновых систем, и предложено объяснение этого феномена присутствием в электродинамической системе вблизи ее критической частоты (границы полосы пропускания) большого числа высокочастотных собственных мод, слабо взаимодействующих с электронным потоком.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 03-02-16192, 05-03-16931).

Список литературы

- [1] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
- [2] *Ott E.* Chaos in dynamical systems. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 1993. 385 p.
- [3] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
- [4] *Безручко Б.П., Булгакова Л.В., Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 6. С. 1136–1139.
- [5] *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. № 5. С. 1–17.
- [6] *Dronov V., Hendry M.R., Antonsen T.M., Ott E.* // Chaos. 2004. V. 14. N 1. P. 30–37.
- [7] *Гинзбург Н.С., Завольский Н.А., Нусинович Г.С., Сергеев А.С.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. № 1. С. 106–114.
- [8] *Airila M.I., Dumbrajs O., Reinfelds A., Strautins U.* // Physics of Plasmas. 2001. V. 8. N 3. P. 4608–4612.
- [9] *Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В.* и др. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. № 9. С. 85–91.

- [10] *Rozental R.M., Zaitsev N.I., Kulagin I.S. et al. // IEEE Transaction on Plasma Science. 2004. V. 32. N 2. P. 418–421.*
- [11] *Блохина Е.В., Рожнев А.Г. // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 11. С. 1390–1396.*
- [12] *Rozhnev A.G. // J. Comm. Techn. Elect. 2000. V. 45. Suppl. 1. P. 595–5101.*
- [13] *Blokhina E.V., Rozhnev A.G. // Proceedings of the Sixth International Vacuum Electronics Conference (IVEC). 2005. Noordwijk. The Netherlands. P. 133–134.*