

09

Особенности картины синхронизации импульсами в автоколебательной системе с трехмерным фазовым пространством

© А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, Л.В. Тюрюкина

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: alkuz@sgu.ru

Поступило в Редакцию 15 ноября 2005 г.

Рассмотрены особенности синхронизации импульсами в автоколебательной системе, предельный цикл которой вложен в трехмерное фазовое пространство.

PACS: 05.45.Xt

Ситуации, когда система с предельным циклом подвержена внешнему периодическому воздействию, широко распространены в радиофизике, электронике, биологии и других областях естествознания [1,2]. С точки зрения теории колебаний и теории динамических систем — это задачи о возникновении квазипериодических движений и явления синхронизации. Среди них выделяется класс задач, когда внешнее воздействие носит характер коротких по длительности импульсов. Подобные задачи привлекательны не только с точки зрения приложений, но и существенны для теории колебаний и нелинейной динамики с позиций возможной специфики картины синхронизации. В [3–7] такая ситуация была изучена в рамках модели, представляющей собой в автономном режиме простейшее укороченное уравнение с предельным циклом в виде окружности:

$$\dot{r} = sr(1 - r^2), \quad \dot{\phi} = 1. \quad (1)$$

Такая система подвергалась импульсному воздействию вдоль оси x :

$$\dot{x} = sx(1 - x^2 - y^2) + c \sum \delta(t - nT), \quad \dot{y} = x + sy(1 - x^2 - y^2). \quad (2)$$

Для нее можно построить аналитически двумерное отображение, а в случае, когда изображающая точка в промежутке между импульсами

успевают вернуться на предельный цикл, и одномерное отображение для фазы. Эти отображения обладают универсальными чертами, поскольку могут быть применены для различных автоколебательных систем вблизи порога бифуркации Андронова–Хопфа. Так, к ней можно прийти, применяя метод медленно меняющихся амплитуд, в задаче о воздействии на осциллятор Ван-дер-Поля периодической последовательностью δ -функций [8]

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = B \sum \delta(t - nT), \quad (3)$$

где x — динамическая переменная, λ — управляющий параметр, T — период следования внешних импульсов, B — их амплитуда. Для адекватной степени общности, однако, необходимо учесть нелинейность в уравнении для фазы (неизохронность систем). С этой целью в [9] был рассмотрен осциллятор Ван-дер-Поля–Дуффинга:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \beta x^3 = B \sum \delta(t - nT), \quad (4)$$

где β — параметр нелинейности. Для системы (4) методом медленно меняющихся амплитуд получены и изучены соответствующие двумерное и одномерное отображения [9]. Заметим, что в случае большой фазовой нелинейности (β велико) мы приходим к стандартному синус-отображению окружности, что и следовало ожидать из общих соображений [1,10].

Подчеркнем еще раз, что результаты исследования системы (2) и ее модификации с учетом фазовой нелинейности [3–7] имеют определенную степень универсальности, поскольку фактически касаются исследования системы у порога бифуркации Андронова–Хопфа. При этом воздействующий импульс может быть направлен не только вдоль оси x , а и в любом направлении в фазовом пространстве, поскольку фазовым портретом является окружность. Для дифференциальных систем (3), (4) с ростом управляющего параметра λ предельный цикл деформируется, но при умеренных λ картина качественно не меняется. Иная ситуация имеет место в более общем случае, когда мы рассматриваем автоколебательную систему, для которой предельный цикл вложен в трехмерное фазовое пространство. Действительно, пусть реализуется ситуация, когда предельный цикл лежит преимущественно в некоторой плоскости (а это обычно так у порога бифуркации Андронова–Хопфа). В этом

случае действие импульса в любом направлении в этой плоскости должно приводить к одному и тому же результату, качественно близкому к результатам анализа систем (2)–(4). Совершенно иная ситуация возникает, если импульс действует в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой лежит предельный цикл. Можно ожидать какую-то иную картину синхронизации, которая, в частности, будет отличаться и от даваемой отображениями для системы (2), и стандартным синус-отображением окружности. В настоящей работе эта проблематика исследована на примере трехмерной потолочной системы — системы Ресслера, которая является своего рода „эталонной“ в нелинейной динамике [1,10].

Начнем со случая, когда внешнее воздействие — периодическая последовательность δ -функций — действует в плоскости, в которой лежит предельный цикл автономной системы Ресслера. Тогда неавтономная система будет описываться следующими уравнениями:

$$\dot{x} = -y - z + A \sum \delta(t - nT), \quad \dot{y} = x + py, \quad \dot{z} = q + (x - r)z, \quad (5)$$

где x, y, z — динамические переменные, p, q, r — параметры системы, а A и T — соответственно амплитуда и период внешнего воздействия. Выберем значения параметров $p = 0.2, q = 0.1, r = 1.5$ такими, чтобы в автономной системе имел место однооборотный предельный цикл. Отметим, что цикл в основном лежит в плоскости (x, y) и лишь его небольшая часть ($\Delta z \approx 3.5$) выступает из этой плоскости в направлении оси z . Период колебаний в автономной системе в этом случае можно определить численно, и он составляет $T = 5.4368309 \dots$

На рис. 1 представлены полученная в результате компьютерного моделирования карта динамических режимов системы (5) на плоскости параметров амплитуда A — период T внешнего воздействия и ее увеличенные фрагменты. На этих и на всех последующих картах белым цветом обозначен режим периода 1, светло-серым — режим периода 2 и т. д., черный цвет отвечает хаосу, а область убегания траектории на бесконечность обозначена одним из оттенков серого. (Характер режима определяется в соответствующем сечении Пуанкаре.) Первое существенное отличие от моделей (2)–(4) состоит в том, что появляются области, которые отвечают убеганию траектории на бесконечность. Это связано с тем, что предельный цикл автономной системы Ресслера, в отличие от упомянутых моделей, имеет ограниченный бассейн притяжения в трехмерном фазовом пространстве. Поэтому сильный импульс

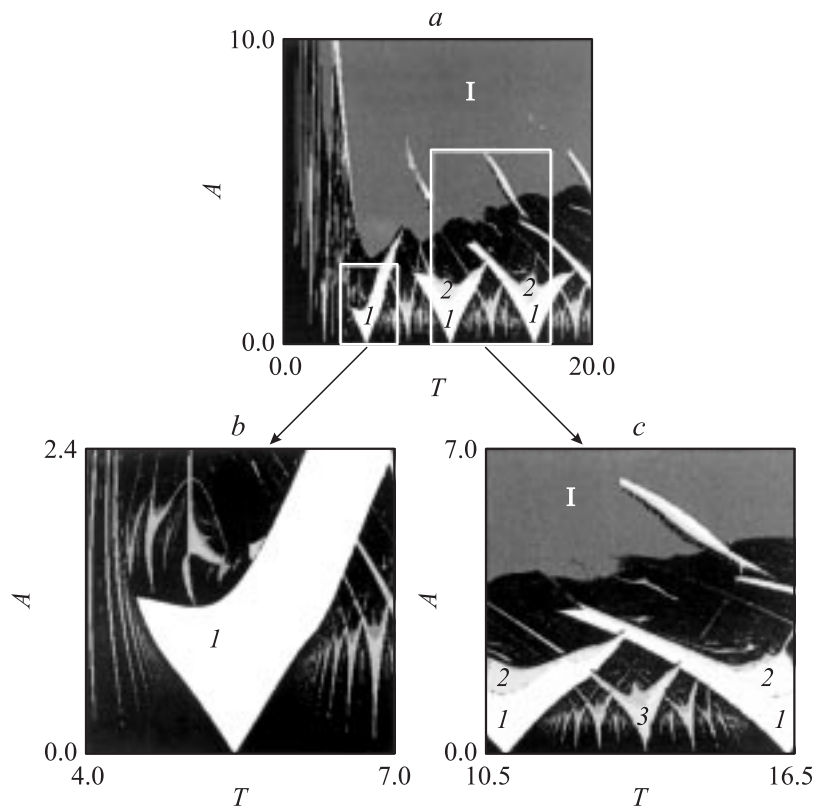


Рис. 1. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты неавтономной системы Ресслера (5) на плоскости параметров амплитуда–период внешнего воздействия. Карты построены для $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 1.5$ (I — разбегание).

может выбросить изображающую точку за пределы этого бассейна, и она в итоге уйдет на бесконечность.

На рис. 1 можно видеть достаточно традиционную картину языков Арнольда. Увеличенные фрагменты карты демонстрируют следующие особенности системы. Так, при достаточно больших периодах внешней силы (по сравнению с собственным периодом системы $T = 5.43\dots$)

картина синхронизации близка к классической, даваемой простейшим одномерным синус-отображением окружности [1,10] (рис. 1, *c*). Внутреннее устройство языков синхронизации также традиционное — можно видеть удвоения периода и характерные конфигурации „crossroad area“ [10]. С другой стороны, при воздействии с периодом, близким к собственному, основной язык синхронизации хотя и окружен системой классических по форме языков, но внутри устроен иначе (рис. 1, *b*). Хорошо видна линия вторичной бифуркации Андронова–Хопфа на „вершине“ языка и отвечающая ей вторичная система языков синхронизации.

Рассмотрим теперь, как изменится картина синхронизации в неавтономной системе Ресслера, если импульсы действуют вдоль оси z , т.е. перпендикулярно плоскости, в которой лежит предельный цикл:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + py, \quad \dot{z} = q + (x - r)z + A \sum \delta(t - nT). \quad (6)$$

На рис. 2 изображены соответствующая карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты для тех же значений параметров автономной системы. Если сопоставить рис. 1 и 2, то видно, что картина синхронизации стала существенно иной. Так, на карте системы (6) (рис. 2) помимо языков синхронизации и области квазипериодических режимов, расположенных в нижней части карты, наблюдаются достаточно большие области режимов периода 1 и 2, расположенные при больших значениях амплитуды внешнего воздействия. Нижняя граница области периода 1 является линией бифуркации Неймарка–Сакера, и к ней подходят языки Арнольда, имеющие острия не только у основания, но и у вершины (рис. 2, *b*). Справа имеется небольшая система языков, образующих незамкнутые кольца. Остальные языки, лежащие справа от основного, имеют вид некоторых полос. При больших амплитудах эти языки трансформируются в большие области режимов различных периодов (рис. 2, *a, c*). Заметим, что при малых периодах воздействия порог „убегания“ траекторий стремится к нулю, что также отличается от случая, представленного на рис. 1.

Таким образом, на примере системы Ресслера показано, что картина синхронизации автоколебательных систем с трехмерным фазовым пространством существенно зависит от направления действия внешних импульсов, она оказывается классической лишь, если они действуют в плоскости, в которой в основном расположен предельный цикл. Но даже

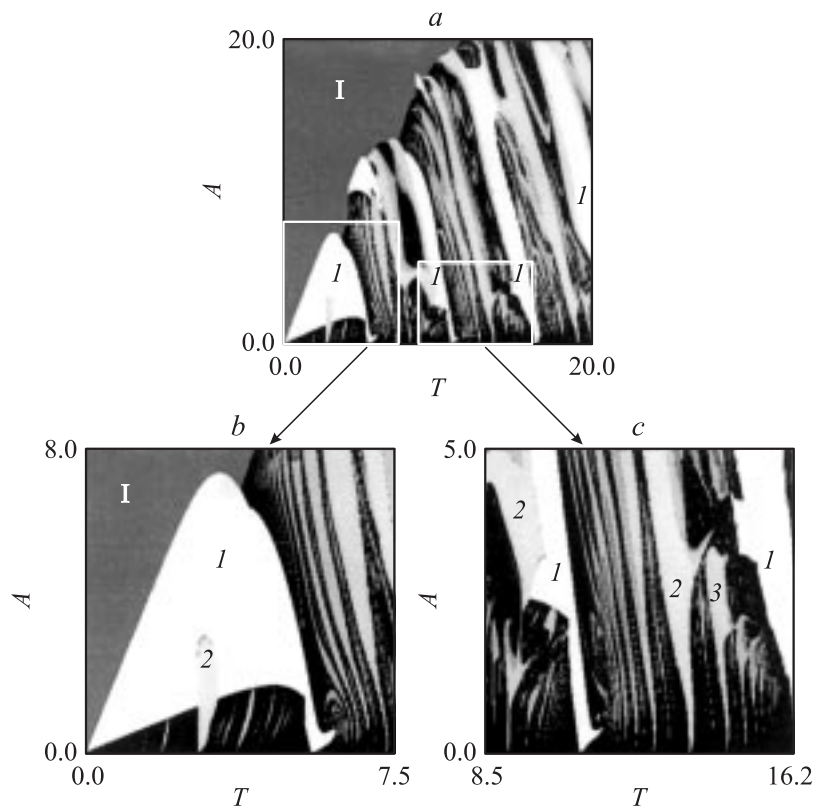


Рис. 2. Карта динамических режимов и ее увеличенные фрагменты для неавтономной системы Ресслера (6) на плоскости параметров амплитуда–период внешнего воздействия. Карты построены для $p = 0.2$, $q = 0.1$, $r = 1.5$.

в этом случае внутреннее устройство основного языка, реализующегося при периоде воздействия, примерно равном собственному, оказывается специфическим. Если же внешние импульсы действуют перпендикулярно этой плоскости, имеет место иная картина языков синхронизации и областей периодических режимов.

Работа поддержана грантами РФФИ № 03-02-16074 и CRDF BRHE REC-006 N Y2-P-06-13.

Список литературы

- [1] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths Y.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001. 490 p.
- [2] *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
- [3] *Ding E.J.* // Phys. Rev. 1986. V. A34. N 4. P. 3547–3550.
- [4] *Ding E.J.* // Phys. Rev. 1987. V. A36. N 3. P. 1488–1491.
- [5] *Ullmann K., Caldas I.L.* // Chaos, Solitons & Fractals. 1996. N 11. P. 1913.
- [6] *Glass L., Sun J.* // Phys. Rev. 1994. V. 50. N 6. P. 5077–5084.
- [7] *Glass L. et al.* // Phys. Rev. A. 1983. N 29. P. 1348–1357.
- [8] *Кузнецов А.П.* // Прикладная нелинейная динамика. 2001. № 6. С. 69–82.
- [9] *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* // Прикладная нелинейная динамика. 2004. № 5. С. 16–31.
- [10] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.