

01;03

## Возможность существования стационарных уединенных волн в диссипативной газожидкостной среде

© Д.Ч. Ким

Сибирский государственный университет телекоммуникаций  
и информатики, Новосибирск  
E-mail: dck@osmf.sccc.ru

В окончательной редакции 17 октября 2005 г.

Впервые методом численного моделирования обнаружено образование уединенной волны при распространении звуковых возмущений в жидкости с теплопроводными пузырьками газа. Выявлен физический механизм, объясняющий существование незатухающей уединенной волны в диссипативной среде, который сводится к обратному эффекту влияния динамики движения пузырька на тепловой баланс между газом и жидкостью, названный нами эффектом движущейся границы.

PACS: 47.55.Ca

**Введение.** Жидкость с пузырьками газа является сложной, нелинейной, распределенной, диссипативной, динамической системой. Многие нелинейные эффекты из различных областей физики переносились в эту систему [1]. Например, проводя аналогию между волнами сжатия в рассматриваемой среде и гравитационными волнами на поверхности мелкой воды, Вейнгарден получил уравнение Кортевега и де Фриза (КдФ) [2]. При этом специфические свойства, присущие пузырьковой среде, оставались не выявленными. Одним из таких специфических свойств является дополнительная степень свободы, связанная с нелинейными колебаниями пузырьков. Проявлением этой дополнительной степени свободы является новый тип „солитона“ с осциллирующей структурой, обнаруженный в [3]. Другим недостаточно изученным свойством является тепловая диссипация, которая является предметом настоящей заметки.

В работах [4–6] показано, что затухание колебаний стенок пузырька определяется теплообменом между фазами, а не вязкостью самой

несущей жидкости: в [4] используется конечно-разностная схема второго порядка точности по пространственным переменным, в [5] реализован ряд спектральных методов, а в [6] решается полная система уравнений конечно-разностными схемами первого и второго порядка точности. Следует отметить, что краевая задача динамики двухфазной газожидкостной смеси, корректно учитывающей теплообмен между фазами, даже с предположениями и допущениями, является сложной и требует новых подходов для численного решения и, в частности, повышения точности численных схем. Для настоящей работы разработан вычислительный алгоритм, основанный на компактных разностных схемах четвертого порядка точности по пространственной координате, как для нелинейного уравнения теплопроводности внутри газового пузырька, так и для неоднородного волнового уравнения типа Лайтхилла.

Диссипация кинетической энергии радиальных колебаний пузыря связана с необратимостью или неполитропичностью процессов в газе. Полагают, что при сжатии, когда температура газа становится выше температуры жидкости, газ отдает в жидкость больше тепла, чем получает от жидкости в процессе своего расширения, когда его температура оказывается ниже температуры жидкости. Согласно данной концепции, тепловая диссипация моделируется „эффективной“ вязкостью в уравнении Рэлея–Ламба [7] или „эффективными“ безразмерными числами Нуссельта. Здесь показано, что эти приближения нельзя считать приемлемыми в акустических задачах.

**Нелинейная волновая динамическая модель жидкости с пузырьками газа — основные уравнения.** В модели [3] заменим адиабатическое поведение газа уравнением нестационарной теплопроводности внутри сферического пузырька. Система уравнений, описывающая одномерное движение газожидкостной смеси, примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P_g}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{dP_g}{dt} \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \kappa(T) r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{dP_g}{dt} = \frac{3}{R} \left( (\gamma - 1) \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} - \gamma P_g \dot{R} \right), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) \\ & = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{1}{\rho} \left[ P_b(t) - P_s \left(t + \frac{R}{c}\right) - P_0 \right] + \frac{R}{c\rho} \frac{dP_b(t)}{dt}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( 1 + \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0} \bar{\rho} \bar{R}^3 \right) \right), \quad (4)$$

$$P - P_0 = c_L^2 (\rho - \rho_0), \quad (5)$$

где

$$u = \frac{1}{\gamma P} \left( (\gamma - 1) \kappa \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{3} r \frac{dP_g}{dt} \right), \quad P_b = P_g(t) - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu\dot{R}}{R}.$$

Здесь и далее  $t$  — время,  $r$  — радиальная координата,  $T$  — температура газа,  $u$  — радиальное поле скорости в газе,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $\gamma$  — показатель адиабаты газа,  $P_g$  — газокинетическое давление в пузырьке,  $P_b$  — давление на внешней поверхности пузырька,  $P_s$  — давление внешнего звукового поля,  $P_0$  — статическое давление на бесконечности,  $R$  — радиус пузырька,  $x$  — координата направления распространения волны,  $c_L$  — скорость звука в жидкости без пузырьков,  $\rho$  — плотность чистой жидкости,  $\mu$  и  $\sigma$  — коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения,  $\varphi$  — объемное содержание газа. Точки над переменными означают производную по времени, черточка сверху означает безразмерную величину, нижний индекс „0“ означает параметры невозмущенного состояния. Из новых допущений отметим, что давление в пузырьке предполагается однородным и зависящим только от времени, так как рассматриваются случаи, когда скорость стенок пузырька значительно меньше скорости звука в газе. Газ считается идеальным с постоянной теплоемкостью, инертным по отношению к окружающей его жидкости и действующее давление значительно меньше давления конденсации этого газа. При этих допущениях можно пренебречь массообменом между несущей и дисперсной фазами.

Уравнение теплопроводности (1) описывает закон нестационарного теплообмена между фазами. Обыкновенное дифференциальное уравнение (2) для давления учитывает тепловую диссипацию и получается при сделанных в модели допущениях и граничных условиях.

Условие совместного деформирования фаз связывает давление жидкости, газа и радиус пузырька. Таким условием является уравнение Рэлея—Ламба (3), описывающее монополярные колебания одиночного сферического пузырька в безграничной жидкости. Распространение волн в среде описывается обобщенным неоднородным волновым уравнением типа Лайтхилла (4), полученным в работе [3]. В этом уравнении сделана поправка к величине газосодержания из-за сжимаемости несущей фазы. Формула (5) является акустическим уравнением состояния жидкости.

**Граничные и начальные условия.** При пульсациях пузырьков возникает задача сопряженного нестационарного теплообмена, когда на движущейся границе жидкость—газ должны быть выполнены соответствующие граничные условия. Большое различие в значениях теплофизических параметров жидкости и газа позволяет считать, что температура жидкости остается постоянной по всему ее объему вплоть до границы раздела фаз. Для уравнения (1) граничные условия диктуются конечностью температуры в центре и необходимостью ее равенства температуре жидкости на стенке. Для уравнений (2) и (3) ставятся естественные начальные условия, как в [3]. Граничное условие для уравнения (4) задается слева  $x = 0$  в виде гармонического источника, а справа  $x = L$  в виде безотражательного условия Зоммерфельда. Отметим, что точность аппроксимаций граничных условий не ниже точности аппроксимации численной схемы.

**Метод решения.** С целью численной реализации вводятся тепловой потенциал  $\Psi$ , безразмерная радиальная координата  $y = r/R(t)$  и новая функция  $\vartheta$ , связанная с тепловым потенциалом формулой  $\vartheta = y\Psi$ . Преобразованная система уравнений (1)–(5) обезразмеривается и интегрируется в соответствии с компактными разностными схемами порядка  $O(\tau^2 + h^4)$  (см. [8]) для уравнения теплопроводности (1) и волнового уравнения (4), а уравнения (2) и (3) — явным методом Рунге—Кутты четвертого порядка с автоматическим выбором шага. Уравнение (4) интегрируется как эволюционная краевая задача на подвижном интервале  $[0, L(t)]$ . Расчеты проводились на вычислительном комплексе МВС-1000М.

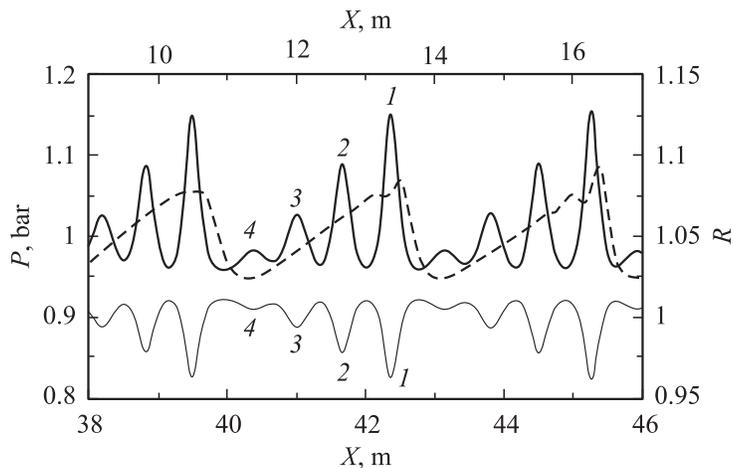
**Результаты.** Основной задачей данной заметки является изучение распространения акустических волн в газожидкостной среде пузырьковой структуры. Общие для всех расчетов параметры:  $P_0 = 100$  кПа,

$T_L = 293 \text{ K}$ ,  $\gamma = 7/5$ ,  $\varphi_0 = 10^{-4}$ ,  $R_0 = 0.5 \text{ mm}$ ,  $P_A = 5 \text{ kPa}$  и  $\omega = \omega_0/20$ , где  $\omega$  — циклическая частота звука и  $\omega_0 = R_0^{-1} \sqrt{3\gamma P_0/\rho_0}$  — собственная частота пузырька. Теплопроводность газа задается формулой  $\kappa(T) = AT + B$ , где  $A = 5.528 \cdot 10^{-5} \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K}^2)$ ,  $B = 1.165 \cdot 10^{-2} \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$ .

Для апробации программы были выполнены расчеты, аналогичные расчетам, приведенным в [4], с параметрами  $P_A = 60 \text{ kPa}$ ,  $R_0 = 50 \mu\text{m}$ ,  $\omega/\omega_0 = 0.78$ . Получено хорошее качественное и количественное (в пределах 20%) согласие [9].

Прежде чем переходить к изучению диссипативной системы, мы исследовали предварительно адиабатическую систему, т. е. не учитывая теплообмен между фазами. Напомним, что хорошо известное уравнение Кортевега и де Фриза [2] для смеси жидкости с однородно распределенными пузырьками газа было получено в предположении, что колебание пузырька линейное и изотермическое, а амплитуда гидродинамических возмущений конечна. Однако следует отметить, что радиальное движение пузырька является изначально нелинейным и на основании [10] можно утверждать, что и на низких частотах  $\omega \ll \omega_0$  нелинейность среды определяется также нелинейностью пузырьков, которая превосходит гидродинамическую нелинейность на два порядка.

В [3] было обнаружено, что начальное возмущение в жидкости с нелинейными, но адиабатическими (или изотермическими) пузырьками распадается на „набор солитонов“. На рис. 1 показан пример пространственной эволюции звукового возмущения. Волновое поле относится к моменту времени  $t = 44 \text{ ms}$ . Верхняя координата  $X$  относится к профилю давления, отмеченного пунктирной линией, а нижняя координата  $X$  — к профилям, отмеченным сплошными линиями. Расчеты показывают, что синусоидальное возмущение вначале ведет себя подобно обычной нелинейной волне в среде без пузырьков: крутизна фронтов увеличивается и образуется  $N$ -образная волна. На расстоянии 13 м начинает сказываться дисперсия, обусловленная наличием пузырьков. На пунктирной кривой видны возникающие в течение полужительного полупериода „зародыши“ солитонов. Дальнейшая эволюция этих зародышей приводит к рассыпанию начального синусоидального возмущения на состав солитонов, которые показаны цифрами 1–4 для давления (жирная линия) и радиуса пузырьков (правая ось, тонкая линия). Вершины их лежат на одной прямой. Сравнение с результатами работы [11] указывает на полное качественное совпадение



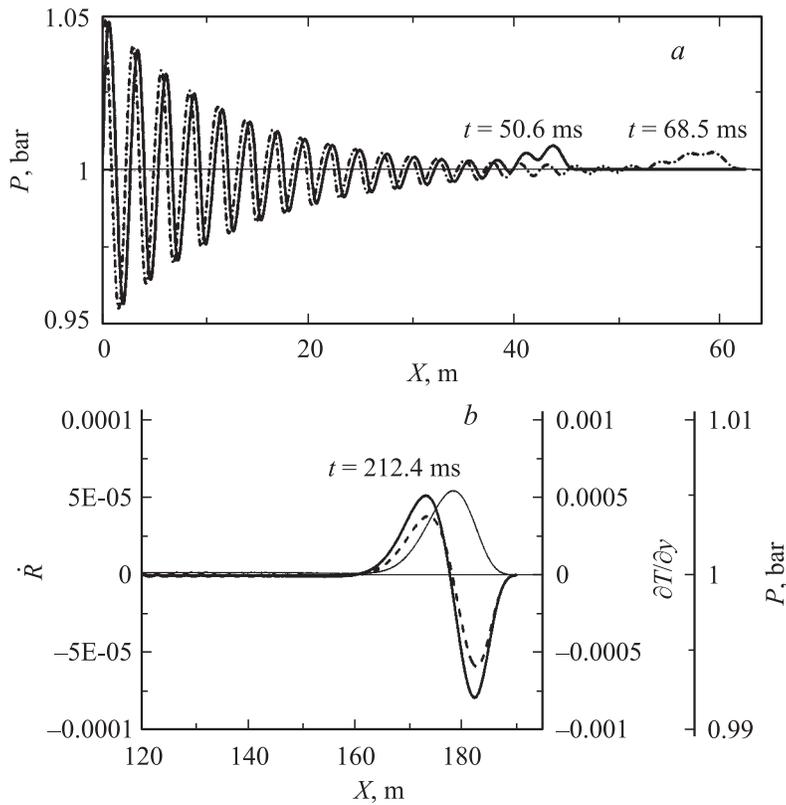
**Рис. 1.** Распад звуковой волны на солитоны в газожидкостной смеси без диссипации.

этих процессов. При малой концентрации пузырьков, в отсутствии диссипации система (1)–(5) является гамильтоновой [12,3]. С учетом слабой нелинейности и с вводом медленных переменных  $\tau = \varepsilon^{1/2}t$ ,  $\eta = \varepsilon^{1/2}(x - c_1t)$ , где  $\varepsilon$  — малый безразмерный параметр, а  $c_1$  есть скорость звука в низкочастотном приближении, из этой системы следует уравнение КдФ

$$R_\tau + \varepsilon \frac{3c_1}{2R_0}(\gamma + 1) \left( \frac{c_1^2}{c_L^2} - 1 \right) RR_\eta + \varepsilon \frac{c_1^3}{2\omega_0^2} \left( 1 - \frac{c_1^2}{c_L^2} \right) R_{\eta\eta\eta} = 0, \quad (6)$$

которое кардинально отличается от полученного ранее в [2]. Следует подчеркнуть, что солитоны нового уравнения КдФ (6) получаются в результате баланса между нелинейным искажением и дисперсионным расплыванием волны, обусловленным только наличием пузырьков.

Наши исследования и работа [2] указывают, что существование солитонов зависит от принятой модели пульсации пузырьков. Как всякая физическая система, двухфазная система жидкость–газ с пузырьками также подвержена потерям энергии. Основным механизмом потерь является теплообмен между пузырьками и несущей фазой. Ниже



**Рис. 2.** Образование стационарной уединенной волны в диссипативной газожидкостной среде.

мы исследуем, как отразится корректный учет тепловой диссипации пузырьков на формировании уединенной волны.

Эволюция звуковой волны в смеси жидкости с теплопроводными пузырьками показана на рис. 2. В начале за один цикл колебаний пузырька количество теплоты, отданное нагретым газом в жидкость, больше количества теплоты, полученного охлажденным газом из жидкости, за счет чего и происходит рассеивание тепловой энергии и демпфирование колебаний пузырька газа. В результате волна сильно

затухает, как видно из графиков, но не до конца. Начиная с некоторой амплитуды, затухание первой полуволны прекращается. В процессе эволюции она объединяется со второй положительной полуволной, как видно на сплошной кривой рис. 2, *a* в момент времени  $t = 50.6 \text{ ms}$ , а те, в свою очередь, с третьей полуволной, как видно на штрихпунктирной кривой в момент времени  $t = 68.5 \text{ ms}$ . В конечном итоге к моменту времени  $t = 110 \text{ ms}$  образуется предельная конфигурация — стационарная уединенная волна, бегущая с постоянной скоростью и без изменения формы. На рис. 2, *b* уединенная волна показана в момент времени  $t = 212.4 \text{ ms}$  тонкой сплошной линией (правая вертикальная ось). В уединенной волне у пузырька суммарный приток и отток тепла уравниваются. Это связано с нелинейностью колебаний пузырька. При этом фаза сжатия пузырька, как известно, существенно короче фазы его расширения, в результате чего становится возможным отмеченное равенство притока и оттока тепла. В этом случае не происходит рассеивания внутренней энергии пузырьков, и они колеблются, находясь в тепловом равновесии с окружающей жидкостью. Действительно, тепловой поток  $q$  связан с градиентом температуры на стенке соотношением  $q = -\kappa(T)(\partial T/\partial r)|_{r=R}$ . У пульсирующего пузырька знак градиента температуры на стенке тесно связан со знаком скорости стенки. Оценки показывают, что характерное время тепловой релаксации больше периода колебания пузырька. При расширении газ в окрестности стенки охлаждается, так как теплопроводность не успевает компенсировать это охлаждение пристенных слоев газа. В результате градиент температуры положителен и тепло втекает из жидкости в газ. И, наоборот, при сжатии газ нагревается, скорость стенки и градиент температуры отрицательны и газ отдает тепло в жидкость. Этот эффект движущейся границы показан на рис. 2, *b*. Здесь пунктирная кривая относится к безразмерному градиенту температуры, жирная сплошная линия к радиальной скорости стенки в момент времени  $t = 0.212 \text{ s}$ .

**Заключение.** Впервые показано, что вопреки существующему мнению в жидкости пузырьковой структуры с теплообменом между фазами возможно образование и распространение стационарной уединенной волны. Для этого в отличие от гамильтоновых систем должно выполняться два условия: обычное условие равенства нелинейных и дисперсионных эффектов и новое условие равенства оттока и притока тепла в газовую фазу.

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН Г.А. Михайлову за постоянное внимание и всестороннюю поддержку и д.ф.-м.н. Ю.Н. Морокову за плодотворное обсуждение компактных разностных схем. Выражаю признательность анонимному рецензенту за тщательное чтение работы, чьи замечания с благодарностью мной учтены.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 05-02-26918-з.

## Список литературы

- [1] *Naugolnykh K., Ostrovsky L.* Nonlinear wave processes in acoustics. Cambridge–New York–Melbourne, 1998.
- [2] *Wijngaarden L.* // *Journal of Fluid Mechanics.* 1968. V. 33. P. 465–474.
- [3] *Kim D.C.* // *Computer Physics Communications.* 2002. V. 147. P. 526–529.
- [4] *Prosperetti A., Crum L.A., Commander K.W.* // *JASA.* 1988. V. 83 (2). P. 502–514.
- [5] *Kamach V., Prosperetti A.* // *JASA.* 1989. V. 85 (4). P. 1538–1548.
- [6] *Kameda M., Matsumoto Y.* // *Phys. Fluids.* 1996. V. 8 (2). P. 322–335.
- [7] *Brennen C.* *Cavitation and Bubble Dynamics.* Oxford University Press, 1995.
- [8] *Kim D.C.* // *Proc. of 4<sup>th</sup> International Conference on Computational Heat and Mass Transfer.* Paris, France. May 17–20. 2005. LAVOISIER. ISBN: 2–7430–0801–6, 562.pdf.
- [9] *Kim D.C.* // *International Conference „Fluxes and Structures in Fluids“.* Moscow, June 20–23, 2005. P. 84–87. Institute of Problems in Mechanics of the RAS.
- [10] *Заболотская Е.А.* // *Акустический журнал.* 1975. Т. 21. С. 334–337.
- [11] *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* // *Physical Review Letters.* 1965. V. 15. P. 240–243.
- [12] *Caffisch R.E., Milsis M.J., Papanicolaou G.C.* et al. // *JFM.* 1985. V. 153. P. 259–273.