01;03

Расчет наката волн на пологий откос

© *М.А. Шерменева, И.В. Шуган*

Научный центр волновых исследований Института общей физики РАН
им. А.М. Прохорова, Москва
E-mail: sher@orc.ru

Поступило в Редакцию 23 мая 2005 г.
В окончательной редакции 8 сентября 2005 г.

Исследуется накат длинных гравитационных поверхностных волн на пологий наклонный берег в рамках приближения мелкой воды. Построено аналитическое решение для возвышения свободной поверхности жидкости в границах применимости модели.

PACS: 46.40.Cd

Накатом поверхностных волн на берег называется наибольшее расстояние, на которое вода заходит на берег. Исследование актуально при определении границы затопления суши в целях защиты от цунами. Кроме того, даже небольшие по своей амплитуде возмущения могут причинять существенный ущерб прибрежной зоне. Аналитическое исследование наката проведено в [1,2]. Пелиновским в [2] получена следующая аналитическая формула для примерного вычисления наката в случае наклонного дна ($h \equiv sx$, где x — удаленность от береговой линии, а h — глубина):

$$H_0 = 2a_0(2h_0/sl_0)^{1/2}. \tag{1}$$

Здесь a_0 и l_0 — соответственно амплитуда и длина волны на глубине h_0; H_0 — накат волн на берег. Кроме того, показано, что метод применим только для относительно крутых откосов, удовлетворяющих условию $s > 14.03a_0^{2/5}h_0^{3/5}l_0^{-1}$. С другой стороны, на очень пологих откосах (при $s < 10.4a_0^{2/5}h_0^{3/5}l_0^{-1}$) происходит обрушение волн в районе береговой линии. В настоящей работе предлагается метод, позволяющий вычислить накат для более широкого спектра параметров, чем это сделано в [2].

Мы предполагаем движение волн периодическим, а дно равномерно наклонным. Берег расположен при $x < 0$, вода — $x > 0$. Накат — абсцисса точки пересечения возвышения свободной поверхности с линией дна, которая обозначена сплошной жирной линией на рис. 1, *a, b*. Используем безразмерные величины

$$x = \frac{x'}{l'_0}, \qquad z = \frac{z'}{h'_0}, \qquad t = \frac{g^{1/2}h'^{1/2}_0}{l'_0}\, t',$$

$$\eta = \frac{\eta'}{a'_0}, \qquad \varphi = \frac{h'_0}{a'_0 l'_0 g^{1/2} h'^{1/2}_0}\, \varphi', \qquad h = \frac{h'}{h'_0}, \tag{2}$$

где физическими являются переменные со штрихами, причем через g — ускорение свободного падения, z — вертикальная координата, t — время, $\varphi(x, z, t)$ — потенциал скорости, η — возвышение свободной поверхности. В безразмерных переменных уравнения, описывающие нелинейную динамику волн в несжимаемой жидкости (уравнение Лапласа, кинематическое и динамическое условия и условие на дне) принимают следующий вид:

$$\mu^2\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0, \qquad -h(x) < z < \varepsilon\eta(x, t) \tag{3}$$

$$\eta_t + \varepsilon\varphi_x\eta_x - \mu^{-2}\varphi_z = 0, \qquad z = \varepsilon\eta(x, t), \quad (A) \tag{4}$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\,\varepsilon\left(\varphi_x^2 + \mu^{-2}\varphi_z^2\right) + \eta = 0, \qquad z = \varepsilon\eta(x, t), \quad (B) \tag{5}$$

$$\varphi_z = -\mu^2 h_x \varphi_x, \qquad z = -h(x). \tag{6}$$

Далее вводятся два малых параметра: нелинейность $\varepsilon = \frac{a'_0}{h'_0}$ и дисперсия $\mu = \frac{h'_0}{l'_0}$. Разлагая потенциал φ по степеням вертикальной координаты $\varphi(x, z, t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty}\big(z + h(x)\big)^m F_m(x, t)$, мы получаем следующее уравнение на функцию потенциала на дне $f(x, t) \equiv F_0(x, t)$ (более подробно вывод

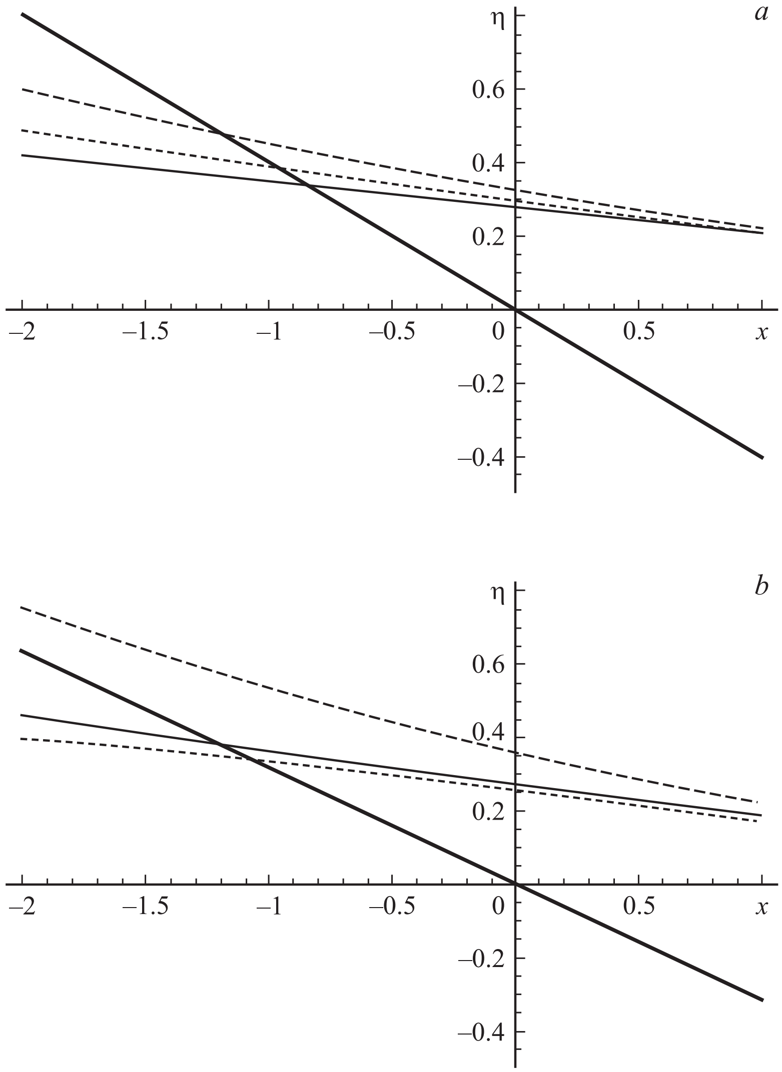

Рис. 1. Накат для параметров: a — $a_0' = 0.1$; $h_0' = 0.8$; $l_0' = 15$, $s' = 0.32$; b — $a_0' = 0.1$; $h_0' = 0.8$; $l_0' = 15$, $s' = 0.4$.

и решение уравнений содержатся в [3]):

$$
\begin{aligned}
&-f_{tt}+s f_x+s x f_{xx}+(-f_{xx} f_t-2 f_x f_{xt})\varepsilon\\
&\quad -s^2\Big(s f_x-x f_{xtt}+3 s x f_{xx}-\frac{1}{2} x^2 f_{xxtt}+\frac{3}{2} s x^2 f_{xxx}+\frac{1}{6} s x^3 f_{xxxx}\Big)\mu^2\\
&\quad +s^4\Big(s f_x-x f_{xtt}+5 s x f_{xx}-\frac{3}{2} x^2 f_{xxtt}+5 s x^2 f_{xxx}-\frac{1}{2} x^3 f_{xxxtt}\\
&\quad +\frac{5}{3} s x^3 f_{xxxx}-\frac{1}{24} x^4 f_{xxxxtt}+\frac{5}{24} s x^4 f_{xxxxx}+\frac{1}{120} s x^5 f_{xxxxxx}\Big)\mu^4\\
&\quad +\Big(-f_{tt} f_{xt}+3 s f_t f_{xt}-f_t f_{xtt}+3 s f_t f_{xx}+4 s x f_{xx} f_{xt}-x f_{tt} f_{xxt}\\
&\quad +3 s x f_x f_{xxt}-\frac{1}{2} s x^2 f_{xx} f_{xxt}-x f_t f_{xxtt}+3 s x f_t f_{xxx}+s x^2 f_{xt} f_{xxx}\\
&\quad +s x^2 f_x f_{xxxt}+\frac{1}{2} s x^2 f_t f_{xxxx}\Big)\varepsilon\mu^2+\frac{3}{2} f_x^2 f_{xx}\varepsilon^2=0. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Уравнение (7) относится к классу уравнений Буссинеска. Более подробную информацию об этих уравнениях можно найти в [4,5]. Мы полагаем, что решение уравнения (7) периодично во времени и соответствует стоячим волнам. В [3] предложен метод аналитического решения (7) в виде отрезка ряда Фурье

$$
\begin{aligned}
f(x,t)=&\Big[S_{00}^1(x)+S_{20}^1(x)\varepsilon^2+S_{02}^1(x)\mu^2+S_{04}^1(x)\mu^4\Big]\sin\omega t\\
&+\Big[S_{10}^2(x)\varepsilon+S_{12}^2(x)\varepsilon\mu^2+S_{30}^2(x)\varepsilon^3\Big]\sin 2\omega t\\
&+S_{20}^3(x)\varepsilon^2\sin 3\omega t+S_{30}^4(x)\varepsilon^3\sin 4\omega t, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

который подставляется в уравнение. Найдены его коэффициенты, которые представляют собой полиномы от функций Бесселя. Через потенциал скорости на дне f получается выражение для возвышения

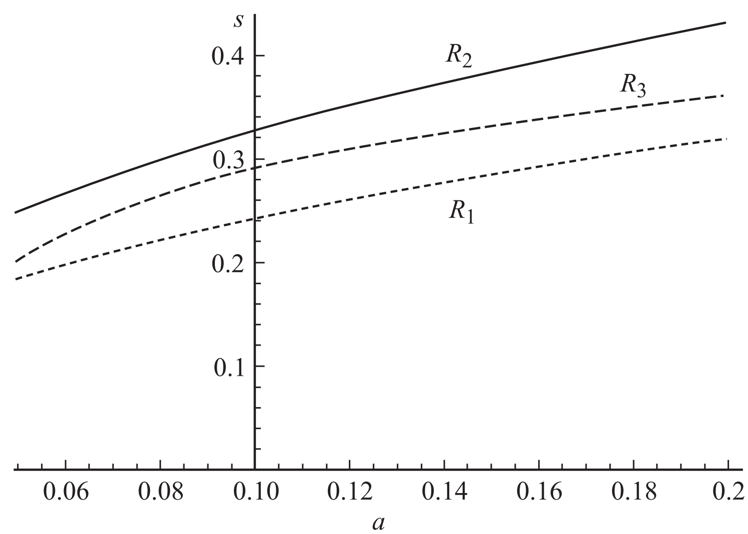

Рис. 2. Области применимости различных методов оценки наката. Здесь a — амплитуда, а s — уклон дна.

свободной поверхности η также в виде подобного отрезка ряда Фурье

$$\eta(x,t) = C_{10}^{0}(x)\varepsilon + C_{12}^{0}(x)\varepsilon\mu^2 + C_{30}^{0}(x)\varepsilon^3 + \left[C_{00}^{1}(x) + C_{20}^{1}(x)\varepsilon^2 + C_{02}^{1}(x)\mu^2 + C_{04}^{1}(x)\mu^4\right]\cos\omega t + \left[C_{10}^{2}(x)\varepsilon + C_{12}^{2}(x)\varepsilon\mu^2 + C_{30}^{2}(x)\varepsilon^3\right]\cos 2\omega t + C_{20}^{3}(x)\varepsilon^2\cos 3\omega t + C_{30}^{4}(x)\varepsilon^3\cos 4\omega t. \quad (9)$$

Обозначим через η_0, η_1 и η_2 следующие функции:

$$\eta_0(x,t) = C_{00}^{1}(x)\cos\omega t, \quad (10)$$

$$\eta_1(x,t) = C_{10}^{0}(x)\varepsilon + \left[C_{00}^{1}(x) + C_{02}^{1}(x)\mu^2\right]\cos\omega t + C_{10}^{2}(x)\varepsilon\cos 2\omega t, \quad (11)$$

$$\eta_2(x,t) = \eta(x,t). \quad (12)$$

Теперь рассмотрим графики функций возвышения свободной поверхности, которые используются для вычисления наката (рис. 1, *a, b*). Приближенное решение η_0 показано крупным пунктиром, η_1 — мелким пунктиром, η_2 — сплошной линией. На рис. 1, *a* видно, что результат измерения наката при помощи η_2 близок к оценке Пелиновского η_0. Рис. 1, *b* сделан для тех значений параметров, для которых метод Пелиновского неприменим, в то время как кривые η_1 и η_2 позволяют сделать примерную оценку наката.

На рис. 2 показано, при каких значениях параметров метод применим. Для определенности мы положим $l'_0 = 15\,\mathrm{m}$ на глубине $h'_0 = 0.8\,\mathrm{m}$. В области R_1 идет обрушение волн и найти точку пересечения возвышения свободной поверхности с береговой линией в принципе нельзя; R_2 — область тех значений, при которых можно посчитать накат методом Пелиновского; R_3 — та область, где метод Пелиновского уже неприменим, но накат можно вычислить при помощи уравнений Буссинеска. Сравнение полученных результатов с аналитическим решением [1] произведено в [6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–02–16384).

Список литературы

[1] *Carrier G.F., Greenspan H.P.* // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. P. 97–109.
[2] *Мазова Р.Х., Пелиновский Е.Н.* Линейная теория набегания волн на берег. Препринт ИПФ АН СССР. 1981. N 23.
[3] *Shermenev A.M., Shermeneva M.A.* Long periodic waves on an even beach. Physical Review E. 2000. V. 61. N 5. P. 6000–6002.
[4] *Madsen P.A., Schaffer H.A.* // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1998. A 8. P. 441–455.
[5] *Mei C.C., Le M′ehaut′e B.* // J. Geophysical. Res. 1966. V. 71. P. 393–400.
[6] *Shermenev A.M.* // Geophys. Astrophys. Fluid Dinamics. V. 94. P. 1–14.