01;05.4

Проникновение магнитного потока в сверхпроводник в режимах вихревая жидкость—вихревое стекло

© И.Б. Краснюк, Ю.В. Медведев

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины

Поступило в Редакцию 1 ноября 2004 г.

Рассматривается проникновение магнитного поля в полупространство для сверхпроводников второго рода, которые находятся в фазе вихревой жидкости или вихревого стекла. Предполагается, что магнитное поле резко увеличивается со временем на границе в режиме с обострением. Показано, что в каждой фазе возможна (эффективная) локализация магнитного потока в форме остановившейся магнитной волны на глубину $x_s \propto e^{-\sigma}\sigma$ в режиме вихревой жидкости и $x_s \propto (2\sigma)^{1/(\sigma+2)}$ — в режиме вихревого стекла, где параметр $\sigma = U_0/T$ зависит от величины термоактивационного барьера U_0 и температуры T в окрестности линии плавления $T_m(B)$, где B — индукция магнитного поля.

Введение. Известно, что даже при $j < j_c$, где j_c — плотность критического тока депиннинга, термически возбужденные вихревые нити могут преодолевать барьер пиннинга с помощью „прыжковой проводимости“: этот феномен называется крипом магнитного потока. Если при $j \to 0$ существует бесконечный барьер пиннинга $(\rho(j \to 0) \to 0)$, то мы говорим о фазе вихревого стекла. Если барьер конечен $(\rho(j \to 0) > 0)$, то мы говорим о вихревой жидкости, где ρ — сопротивление потока [1].

В данной работе рассматривается стандартная задача о проникновении магнитного поля в полупространство $x > 0$ в параллельной геомерии $B \parallel z, E, j \parallel y$ и $v \parallel x$, где $v = v_0 e^{-U(j)/T}$, U — активационный барьер, не зависящий от магнитного поля B, T — температура, E — электрическое поле, v — скорость движения вихрей (которую в дальнейшем мы будем считать близкой к критической), а v_0 — „микроскопическая“ скорость.

Граничное условие задается в режиме с обострением [2]

$$b(0,\tau) = b_0(1-\tau)^m, \quad b(\infty,\tau) = 0, \quad (m < 0), \ \tau > 0,$$

где $b = B/H_{c_1}$, H_{c_1} — первое критическое поле, $\tau = t/t_0$, t_0 — время существования решения.

При $m = 0$ в режиме вязкого течения потока такая задача рассматривалась в статье [3]; при $m = 0$ в режиме крипа магнитного потока для моделей вихревая жидкость—вихревое стекло аналогичная задача рассматривалась в работе [1].

Данная статья состоит из двух частей: в первой части мы рассматриваем случай конечного активационного барьера и показываем, что задача сводится к диффузионному уравнению градиентного типа с коэффициентом диффузии, пропорциональным магнитному полю (уравнение (2)) — для системы в фазе вихревой жидкости; во второй части мы показываем, что в режиме вихревого стекла следует рассматривать уравнение со степенной нелинейностью по пространственной производной с показателем $\sigma = U_0/T$, где $U_0 = U(j \to 0)$. Такое уравнение (10) предложено в статье [1].

Для модели вихревой жидкости имеет место эффективная локализация магнитного потока с бесконечной скоростью распространения возмущений (рис. 1). Для модели вихревого стекла мы получаем магнитную волну с неподвижной точкой фронта, локализованную в области $0 < x < x_0$ в течение всего времени действия граничного режима (рис. 2). Магнитные возмущения из области локализации не выходят, и однородной магнитный фон при $x > x_0$ остается неизменным.

Режим вихревой жидкости отличается от режима вихревого стекла лишь тем, что практически вся энергия локализована в конечной области $x < x_s$. Отличие заключается в том, что магнитное поле правее точки x_s не равно нулю, но равномерно ограничено в течение всего процесса.

1. Локализация магнитного потока в режиме вихревой жидкости. Такое поведение магнитного поля следует ожидать при крипе для вихревой жидкости при высоких температурах $T > T_m(B)$, где T_m — линия плавления вихревой решетки ([1], с. 1347).

Различие между двумя фазами (вихревой жидкости и вихревого стекла) сверхпроводника определяется фундаментальным параметром

$$\alpha = \left|\frac{\partial U(j)}{\partial j}\right| \frac{\delta j}{T},$$

где δj есть характерный масштаб задачи. При $\alpha \ll 1$ задача является линейной, а вихревая динамика — диффузионной; при $\alpha \gg 1$ мы имеем дело с нелинейной краевой задачей в фазе вихревого стекла со степенным граничным режимом при $m > 0$ и режимом с обострением — при $m < 0$ [2] в указанном во введении граничном условии.

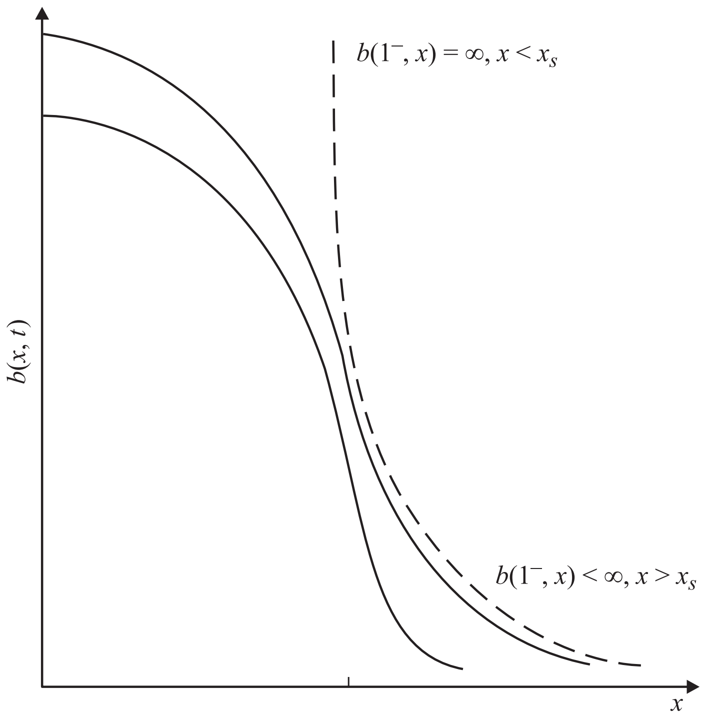

Рис. 1. Эффективная локализация магнитого потока. Практически вся энергия локализована в конечной области $\{x < x_s(D, R_0)\}$.

Для модели Андерсона–Кима с конечным активационным барьером имеет место соотношение

$$\alpha = \frac{U_0}{T}\frac{j}{j_c},$$

и отклик сверхпроводника всегда является квазилинейным (диффузионным) при малых плотностях тока j. Обратно, в режиме вихревого стекла отклик сверхпроводника на возмущения по току

$$\alpha = \mu\frac{U(j)}{T},$$

где μ — некоторая постоянная, имеет степенную нелинейность типа $|\nabla b|^{\sigma}$, причем порядок уравнения повышается на единицу (уравнение (10)).

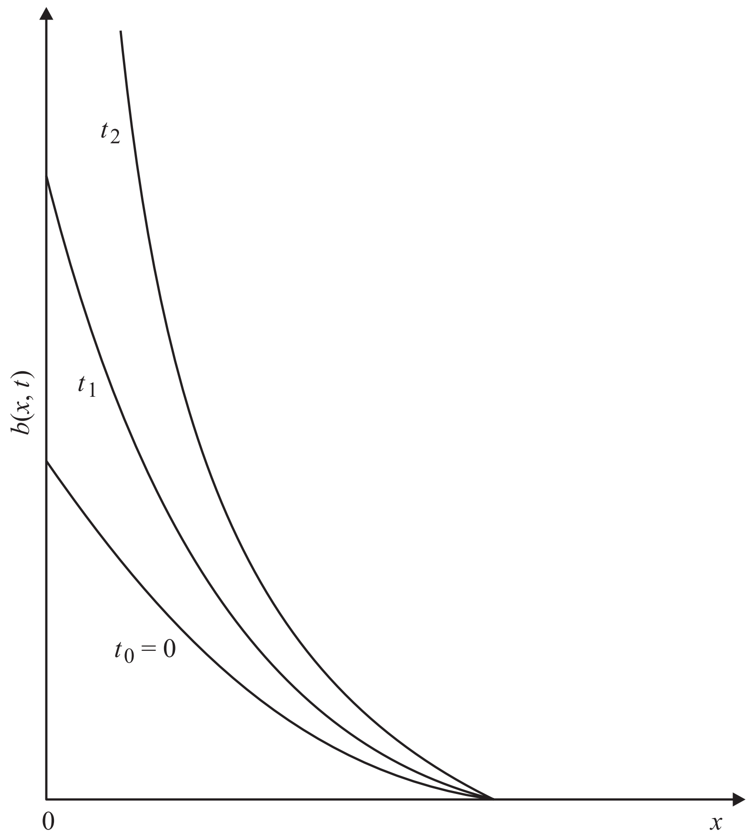

Рис. 2. Эволюция при $t \to t_0^-$ локализованного режима с обострением для модели вихревого стекла $(t_1 < t_2)$.

Если имеют место равенства $v_0 = Av_c$ и $(\partial U/\partial j)|_0 = U_0/j_c$, где A — множитель порядка единицы, v_c — критическая скорость, то [1]

$$\rho = 2A\rho_{\text{flow}}(B)\frac{U_0}{T}e^{-U_0/T}, \tag{1}$$

где

$$\rho_{\text{flow}}(B) = \rho_n B/H_{c_2}.$$

Здесь H_{c_2} — второе критическое поле, ρ_n — сопротивление в нормальном состоянии.

Используя уравнение Максвелла

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}$$

и закон Ома $E = \rho j$ с учетом соотношения (1), мы получаем уравнение

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi}\nabla\big(\rho(B)\nabla B\big),$$

которое в безразмерном виде допускает представление

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} = D\nabla\big(\rho(b)\nabla b\big), \tag{2}$$

где мы ввели следующие безразмерные координаты: $x \to x/\lambda$, $\tau = t/t_0$, а коэффициент диффузии равен

$$D = \frac{H_{c_1}}{H_{c_2}} c^2 \rho_n \frac{t_0}{\lambda^2}.$$

Здесь λ — лондоновская глубина проникновения, c — скорость света, и в силу соотношения (1) $\rho(b) = 2\sigma e^{-\sigma} b$.

Рассмотрим для уравнения (2) следующее граничное условие:

$$b(0, \tau) = b_0(1-\tau)^{-1}, \quad \tau < 1, \quad b_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{3}$$

Краевая задача (2)–(3) имеет решение в разделяющихся переменных [2]

$$b_s(x, \tau) = b_0(1-\tau)^{-1}(1 - x/x_s)^2, \quad 0 < x \leqslant x_s, \tag{4}$$

где

$$x_s = (6Db_0)^{1/2} \qquad (D \propto \sigma). \tag{5}$$

При $x > x_s$ эта функция равна нулю (рис. 3). Из представления решения (4)–(5) следует, что распространение магнитного поля локализовано, несмотря на неограниченное нарастание поля в этой области при $\tau \to 1^-$.

В [1] рассматривалось уравнение (2) при постоянном коэффициенте диффузии (в окрестности точки $b \gg 1$). В этом случае оно имеет простой вид

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} = D\Delta b. \tag{6}$$

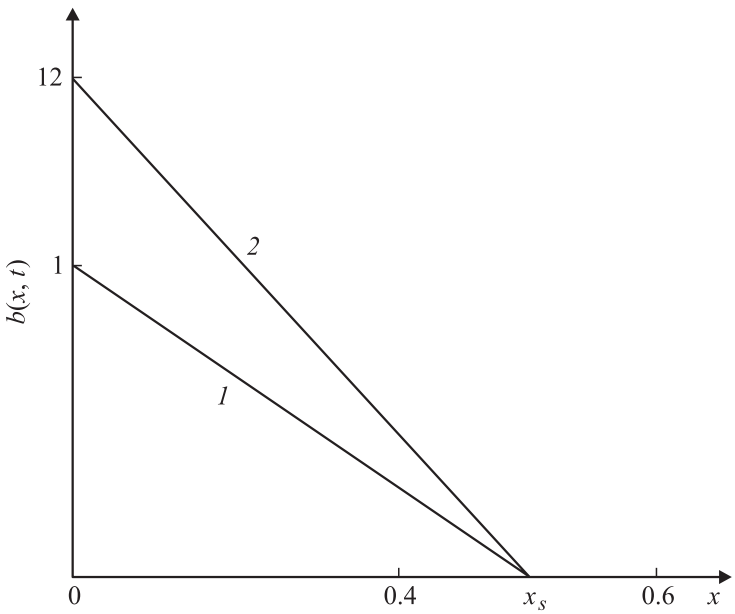

Рис. 3. Остановившаяся магнитная волна. Параметры: $D = 0.354$, $\sigma = 2$, $b_0 = 1$, $x_s = 0.5$; *1* — $t_0 - t = 1.25 \cdot 10^{-2}$; *2* — $t_0 - t = 9 \cdot 10^{-4}$.

Рассмотрим для определенности граничное условие

$$b(0, \tau) = b_0 \exp R_0(1 - \tau)^{-1}, \qquad R_0 = \text{const} > 0 \tag{7}$$

и начальное условие

$$b_0(x) = \text{const}. \tag{8}$$

Мы выбрали граничное условие (7) в экспоненциальной форме лишь по той причине, что в этом случае решение представимо в аналитической форме (см. [2]). Связано это также с тем, что коэффициент диффузии является постоянным. Для общего уравнения (2) могут быть построены автомодельные решения в полупространстве $\{x > 0\}$ с заданным при $x = 0$ граничным режимом вида

$$b(0, \tau) = b_1(\tau), \qquad \tau > 0,$$

где $b_1(\tau)$ неограниченно возрастает при увеличении τ.

Например, если $b_1(\tau) = b_0(1+\tau)^m$, $m > 0$, то соответствующее решение имеет вид

$$b_A(x,\tau) = b_0(1+\tau)^m f_A(\xi), \qquad \xi = x\big/(1+\tau)^{(1+m\sigma)/(\sigma+2)}.$$

Если же $b_1(\tau) = b_0 e^\tau$, то

$$b_A(x,\tau) = b_0 e^\tau f_A(\xi), \qquad \xi = x\Big/\exp\left\{\frac{\sigma}{(\sigma+2)}\,\tau\right\}.$$

Эти автомодельные решения являются асимптотически устойчивыми.

Начально-краевая задача (6)–(8) имеет аналитическое решение ([2], с. 132), график которого изображен на рис. 1. Как и на рис. 2, практически вся энергия локализована в конечной области $x < x_s$, где $x_s = 2(DR_0)^{1/2}$. Для любого $x_1 > x_s$ энергия

$$W(x_1,t) = \int\limits_{x_1}^{\infty} b(\xi,t)\,d\xi < \mathrm{const}, \qquad t \in (0,t_0).$$

Отметим независимость эффективной глубины локализации от амплитуды b_0 (в случае учета зависимости $\rho(b)$ это не так).

Таким образом, в области полей, отличных от $H_{c_2}(T)$, где сверхпроводник находится в фазе вихревой жидкости, имеет место строгая локализация магнитного поля (по терминологии [2]). В окрестности $H_{c_2}(T)$ имеет место только эффективная локализация. Объясняется это тем, что, когда линия плавления $B_m(T)$ приближается к линии $H_{c_2}(T)$, имеет место кроссовер, где параметр порядка резко увеличивается и становятся важными флуктуации вблизи $H_{c_2}(T)$ (см. соответствующую диаграмму для фазы вихревой жидкости на рис. 2 из [1]).

2. Модель вихревого стекла. В режиме вихревого стекла в области температур T, близких к линии плавления $T_m(B)$, отклик системы становится сильно нелинейным, поскольку параметр $\alpha \to \infty$ при $j \to 0$. Уравнение (2) при этом следует заменить на уравнение [1]

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\,[vB]. \tag{9}$$

В ([1], с. 1351) показано, что если выбрать активационный барьер в виде

$$U(j) = U_0 \ln\left(\frac{j_c}{j}\right),$$

а скорость движения вихрей в виде

$$v = v_0 \exp\left[-U(j)/T\right] = v_0 J|J|^{\sigma} \qquad (J = j/j_c),$$

в окрестности некоторого равновесного значения $B = B_0$ (в нашем случае $B = B_{c_1}$), то уравнение непрерывности вихревой линии (9) допускает редукцию к уравнению

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \nabla\left(\nabla b|\nabla b|^{\sigma}\right), \tag{10}$$

где $\sigma = U_0/T$, а безразмерные координаты суть $x \to x/d_p$, $t \to tv_0/d_p$, $d_p = cB_0/4\pi j_c$, а j_c — критический ток. (При $d_p/v_0 = t_0$ мы получаем предыдущее соответствие $t \to \tau$).

Выражение для скорости мотивировано требованием получить при высоких температурах $\sigma \to 0$ кроссовер к режиму вязкого движения вихрей $v \propto J$. Таким образом, уравнение (10) описывает лишь возмущения магнитного поля на фоне равновесного значения B_0. Однако в рамках теории слабого коллективного пиннинга такая модель согласуется с экспериментальными данными (см., например, [4,5]).

Как показано в ([1], рис. 6), вблизи линии плавления $B_m(T)$ термоактивационный (конечный) барьер, препятствующий движению вихрей, является достаточно большим, $T \ll U_0 < \infty$, и вихревая жидкость запиннингована (TAFF-режим). Вблизи верхнего критического поля $H_{c_2}(T)$ барьер является малым, $U_0 \ll T$, и вихревая жидкость не может быть запиннингована (FF-режим). Ниже мы показываем, что параметр $\sigma = U_0/T$ определяет глубину проникновения магнитного потока в полупространство в режиме с обострением. Случай $\sigma \gg 1$ для конечного образца исследован в [1].

Уравнение (10) описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений по любому постоянному фону магнитного поля. Так, функция $b(x,t) = b_A(x,t)$ является решением, которое имеет конечный фронт на однородном (нулевом) фоне.

Рассмотрим уравнение (10) с граничным условием

$$b(0,t) = b_0(1-t)^m, \qquad 0 < t < 1, \quad m < 0.$$

Соответствующее автомодельное решение имеет вид

$$b_A(x,t) = b_0(1-t)^m \theta_A(\xi), \tag{11}$$

где

$$\xi = \frac{x}{(1-t)^{(1+m\sigma)/(\sigma+2)}}.$$

Здесь функция $\theta_A \geqslant 0$ — обобщенное решение краевой задачи

$$b_0^\sigma(|\theta_A'|^\sigma \theta_A')' - \frac{1+m\sigma}{\sigma+2}\,\theta_A'\xi + m\theta_A = 0, \quad \xi > 0 \tag{12}$$

с граничным условием

$$\theta_A(0) = 1, \qquad \theta_A(\infty) = 0.$$

В частном случае $m = -1/\sigma$ уравнение (12) легко интегрируется. Соответствующее автомодельное решение

$$b_A(x,t) = b_0(1-t)^{-1/\sigma}\left[(1-x/x_0)_+\right]^{(\sigma+2)/\sigma},$$

где

$$x_0 = \frac{\sigma+2}{\sigma}\left[\frac{2\sigma(\sigma+1)}{(\sigma+2)}\right]^{1/(\sigma+2)} b_0^{\sigma/(\sigma+2)}, \tag{13}$$

представляет собой магнитную волну с неподвижной точкой фронта, локализованную в области $0 < x < x_0$ в течение всего времени действия граничного режима с обострением. Магнитные возмущения из области локализации не выходят, и однородный магнитный фон при $x > x_0$ остается неизменным (рис. 3). Здесь введено обозначение $(\kappa)_+ = \{\kappa$ при $\kappa \geqslant 0$; 0 при $\kappa < 0\}$ и под 1^- мы понимаем точный верхний предел слева.

Пространственно-временна́я структура автомодельного решения (11) указывает на то, что при $m < -1/\sigma$ действие режима с обострением не будет локализовано [2], т.е.

$$x_f(t) \sim (1-t)^{(1+m\sigma)/(\sigma+2)} \to \infty$$

при $t \to 1^-$, где x_f — координата фронта волны.

Отметим, что в случае степенного граничного режима $(m > 0)$ можно получить аналогичный результат, который при $m = 0$ вырождается в формулу для координаты фронта в пластине $b(x_f, t) = 0$ вида

$$x_f(t) = (1+t)^{1/\sigma}, \qquad \sigma \gg 1,$$

(см. [1]). Аналогичная формула для полупространства, рассчитанная по методике [2], имеет вид

$$\bar{x}_f = (1+t)^{1/(\sigma+2)}, \qquad t \to t/t_0, \qquad \sigma > 0.$$

При $m \in (-1/\sigma, 0)$ есть локализация магнитного потока, причем поле растет до бесконечности только в точке $x = 0$ ([2], с. 92).

Для фазы вихревого стекла в режиме с обострением магнитный поток проникает в полупространство на конечную глубину, которая зависит от температуры и термоактивационного барьера через параметр σ по формуле (13).

Аналогичную формулу для режима вихревой жидкости можно записать в виде

$$x_s = \left[2Db_0 e^{-\sigma}\sigma\right]^{1/2}. \tag{14}$$

Как видим, когда барьер активации мал ($\sigma \to 0$), магнитное поле почти не проникает в сверхпроводник.

Для модели вихревого стекла при любых конечных температурах следует определить предел в соотношении (13) при $\sigma \to \infty$, что приводит к равенству

$$x_0 = [2\sigma]^{1/(\sigma+2)} + O(\sigma^{-1}). \tag{15}$$

Из соотношений (14)–(15) вытекают следующие утверждения: 1a) при $\sigma \to \infty$ для модели вихревой жидкости глубина проникновения магнитного потока $x_s(\sigma) \to 0$; 2a) для модели вихревого стекла глубина проникновения магнитного поля при $\sigma \to \infty$ стремится к единице.

С другой стороны: 1b) при $\sigma \to 0$ в режиме вихревой жидкости мы имеем асимптотическую формулу $x_s = [2Db_0\sigma]^{1/2}$; 2b) при $\sigma \to 0$ в режиме вихревого стекла имеет место асимптотика $x_s = 2\sigma^{1/2}$. Для идентичных краевых условий следует положить $D = b_0 = 1$. Тогда указанные выше формулы совпадают с точностью до множителя $\sqrt{2}$, что имеет простой физический смысл.

Таким образом, отличие отклика сверхпроводника на внешнее (граничное) возмущение при слабых возмущениях по току $j_c - j \ll j_c$ [1] в каждой из рассмотренных фаз имеет место лишь при достаточно больших $\sigma > 0$.

Список литературы

[1] *Blatter G., Feigelman M.V., Geshkenbein V.B.* et al. // Rev. of Modern Phys. 1994. V. 66. N 4. P. 1125–1388.

[2] *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.

[3] *Романовский В.Р.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. В. 12. С. 47–57.

[4] *Kung P.G., Maley M.P., McHenry M.E.* et al. // Phys Rev. B. 1992. V. 48. N 18. P. 13922–13938.

[5] *Zeldov E., Amer N.M., Koren G.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 3093–3098.