01;04

Точные аналитические решения самосогласованных уравнений гидродинамики плазмы с поглощающими граничными условиями

© В.А. Федоров

ОАО „Радиотехнический институт им. академика А.Л. Минца“, Москва
E-mail: f_v99@mail.ru

Поступило в Редакцию 9 декабря 2004 г.

Получены точные аналитические решения одномерной, самосогласованной системы нелинейных уравнений гидродинамики плазмы с поглощающими граничными условиями на проводящей поверхности электрически изолированного тела. Найдены величины напряженности электрического поля, скорости и концентрации электронов плазмы.

Решение краевых задач динамики потоков заряженных частиц, движущихся к поверхности поглощающего тела и не скомпенсированных по объемному заряду, требует определения самосогласованного электрического поля, зависящего от распределения заряженных частиц и их полного числа, изменяющегося со временем. Одновременный учет данных факторов является основным препятствием получения аналитических решений, приводящим к постановке задач с упрощениями [1,2] или к краевым условиям без поглощения [3,4]. Чтобы преодолеть отмеченное препятствие, запишем закон сохранения электрического заряда для системы заряженное изолированное поглощающее тело — слой плазмы в аналитическом виде, т. е. получим еще один интеграл движения системы уравнений, что даст возможность определить распределение заряженных частиц и их изменяющееся полное число одновременно. Это позволит найти точные аналитические решения нелинейной системы уравнений гидродинамики плазмы с поглощающими граничными условиями, что является целью данной работы.

Рассмотрим слой плазмы толщиной Δ, примыкающий к электрически изолированному телу с проводящей поверхностью S_0, имеющей заряд $Q_0(0) > 0$ с поверхностной плотностью $\sigma_0(0)$. Пусть заряды электронов $Q_e(0)$ и ионов $Q_i(0)$ слоя плазмы таковы, что справедливо равенство $Q(0) + Q_e(0) + Q_i(0) = 0$. Считая, что движутся только электроны, а движение одномерно, данное равенство представим следующим образом:

$$\sigma_0(t)R_0^\kappa + \int\limits_{R_0}^{R_c} e\left[n_e(R,t) - n_i(R,0)\right]R^\kappa dR = 0. \tag{1}$$

Здесь R_0, R_c — расстояния границ слоя плазмы от начала координат, $R_c = R_0 + \Delta$, $\kappa = 0, 1, 2$ в случае плоской, цилиндрической и сферической симметрии, $n_{e,i}(R,t)$ — концентрация электронов и ионов плазмы, e — заряд электрона, R — радиус точки пространства.

Учитывая сказанное, систему одномерных уравнений гидродинамики холодной плазмы для электронов запишем в виде [5]:

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e\frac{\partial v_e}{\partial R} + \nu_e v_e = \frac{e}{m_e}E, \tag{2}$$

$$\frac{1}{R^\kappa}\frac{\partial}{\partial R}(R^\kappa E) = 4\pi e(n_e - n_i), \tag{3}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi e n_e v_e. \tag{4}$$

Здесь $E(R,t) = E_0(R,t) + E_e(R,t) + E_i(R,0)$ — напряженность электрического поля зарядов $Q_0(t)$, $Q_e(t)$, $Q_i(0)$, $v_e(R,t)$, m_e — скорость и масса электронов, $\nu_e = \text{const}$ — частота столкновений электронов с нейтральными частицами плазмы.

В качестве начальных и граничных условий системы уравнений (2)–(4) зададим [6]:

$$v_{e,i}(R_*,0) = 0, \qquad n_{e,i}(R_*,0) = n^0_{e,i} f_{e,i}(R_*,0), \tag{5}$$

$$E(R_*,0) = \frac{4\pi}{R_*^\kappa}\left\{\sigma_0(t)R_0^\kappa + \int\limits_{R_0}^{R_*} e\left[n_e^0 f_e(R_*,0) - n_i^0 f_i(R_*,0)\right]R_*^\kappa dR_*\right\}, \tag{6}$$

$$v_{e,i}(R_0,t) = 0, \qquad n_{e,i}(R_0,t) = 0, \tag{7}$$

$$-\frac{\partial\sigma_0(t)}{\partial t} = e n_e(R_0+0,t)v_e(R_0+0,t), \qquad E(R_0,t) = 4\pi\sigma_0(t), \tag{8}$$

$$E(R_c,t) = 0, \quad v_{e,i}(R_c,t) = 0, \quad n_{e,i}(R_c,t) = n^0_{e,i} f_{e,i}(R_c,t), \tag{9}$$

где $R_0 \leqslant R_* \leqslant R_c$, $n_e^0 = n_i^0 = \text{const}$ — невозмущенные концентрации электронов и ионов, $f_{e,i}(R,t) \geqslant 1$.

Интегрируя (3) по объему слоя плазмы и используя теорему Гаусса, найдем

$$E(R,t)=\frac{4\pi}{R^\kappa}\left\{\sigma_0(t)R_0^\kappa+\int\limits_{R_0}^{R}en_e^0\big[f_e(R,t)-f_i(R,0)\big]R^\kappa dR\right\}, \tag{10}$$

где $R_0\leqslant R\leqslant R_c$, R — конечное положение подвижной границы объема. Равенство (1) можно представить следующим образом:

$$\sigma_0(t)R_0^\kappa+\int\limits_{R_0}^{R}en_e^0\big[f_e(R,t)-f_i(R,t)\big]R^\kappa dR$$

$$=-\int\limits_{R}^{R_c}en_e^0\big[f_e(R,t)-f_i(R,0)\big]R^\kappa dR. \tag{11}$$

Принимая во внимание выражение (11), из (10) получим

$$E(R,t)=-\frac{m_e}{e}\left\{\omega_0^2\int\limits_{R}^{R_c}\big[f_e(R,t)-f_i(R,0)\big]R^\kappa dR\right\}\frac{1}{R^\kappa}, \tag{12}$$

где $\omega_0^2=4\pi e^2n_e^0/m_e$. Считая, что пересечения траекторий частиц нет, имеем [7]

$$\int\limits_{R}^{R_c}n_e(R,t)R^\kappa dR=\int\limits_{R_*}^{R_c}n_e(R_*,0)R_*^\kappa dR_*. \tag{13}$$

Учитывая соотношение (13), выражение (12) запишем в виде

$$E(R_*,R)=-\frac{m_e}{e}\left[C(R_*)-\omega_0^2\int\limits_{R}^{R_c}f_i(R,0)R^\kappa dR\right]\frac{1}{R^\kappa}, \tag{14}$$

где $C(R_*)=\omega_0^2\int\limits_{R_*}^{R_c}f_e(R_*,0)R_*^\kappa dR_*$. Подставляя (14) в уравнение (2), получим

$$\frac{\partial v_e}{\partial t}+v_e\frac{\partial v_e}{\partial R}+\nu_e v_e=-\left[C(R_*)-\omega_0^2\int\limits_{R}^{R_c}f_i(R,0)R^\kappa dR\right]\frac{1}{R^\kappa}. \tag{15}$$

Переходя к субстанциональной производной в (15), найдем

$$\frac{d^2R}{dt^2}+\nu_e\frac{dR}{dt}=-\left[C(R_*)-\omega_0^2\int\limits_R^{R_c} f_i(R,0)R^{\kappa}dR\right]\frac{1}{R^{\kappa}}. \qquad (16)$$

Записывая (3) в переменных Лагранжа, получим уравнение для определения $n_e(R_*,t)$

$$n_e(R_*,t)=n_i(R_*,0)+\frac{1}{4\pi e}\left(\kappa\frac{E}{R}+\frac{\partial E}{\partial R}+\frac{\partial E}{\partial R_*}\frac{1}{\partial R/\partial R_*}\right). \qquad (17)$$

Уравнение (15) можно привести к уравнению Абеля второго рода [8]

$$v_e\frac{\partial v_e}{\partial R}+\nu_e v_e=-\left[C(R_*)-\omega_0^2\int\limits_R^{R_c} f_i(R,0)R^{\kappa}dR\right]\frac{1}{R^{\kappa}}. \qquad (18)$$

Если $\nu_e=0$, то решение уравнения (18) представим следующим образом:

$$v_e(R_*,R)=-\sqrt{-2\int\limits_{R_*}^{R}\left[C(R_*)-\omega_0^2\int\limits_R^{R_c} f_i(R,0)R^{\kappa}dR\right]\frac{dR}{R^{\kappa}}}. \qquad (19)$$

Из (19) получим

$$t(R_*,R)=\pm\int\limits_{R_*}^{R}\frac{dR}{\sqrt{-2\int\limits_{R_*}^{R}\left[C(R_*)-\omega_0^2\int\limits_R^{R_c} f_i(R,0)R^{\kappa}dR\right]\frac{dR}{R^{\kappa}}}}. \qquad (20)$$

Записывая уравнение (3) в переменных Лагранжа и используя (14), (20), найдем

$$n_e(R_*,R)=n_i^0+\frac{1}{4\pi e}\left(\kappa\frac{E}{R}+\frac{\partial E}{\partial R}-\frac{\partial E}{\partial R_*}\frac{\partial t/\partial R}{\partial t/\partial R_*}\right). \qquad (21)$$

Таким образом, выражения (14)–(17) и (19)–(21) представляют собой аналитические решения самосогласованной, нелинейной системы уравнений гидродинамики плазмы с поглощающими, нестационарными граничными условиями для различных случаев симметрии. Данные решения для рассматриваемой структуры были получены благодаря тому, что закон сохранения электрического заряда, записанный в виде уравнения явным образом, дал еще один интеграл движения системы уравнений и позволил одновременно определить распределение заряженных частиц и из изменяющееся полное число. Отметим, что увеличение числа интегралов движения динамических структур существенно расширяет круг задач, имеющих точные аналитические решения нелинейных систем уравнений. В частности, данный метод представляет несомненный интерес при исследовании динамики заряженных частиц двойных плазменных слоев [9], часто встречающихся либо в свободном пространстве, либо вблизи изолированных, заряженных, поглощающих тел как в лабораторных условиях [10], так и в космосе [11,12].

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 167 с.
[2] *Барминова Е.Е., Чихачев А.С.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 11. С. 2097–2100.
[3] *Наумов Н.Д.* // РЭ. 2000. Т. 45. № 6. С. 755–757.
[4] *Федоров В.А.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 1. С. 103–109.
[5] *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1970. 208 с.
[6] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
[7] *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.
[8] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
[9] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1929. V. 33. P. 954–989.
[10] *Eliezer S., Hora H.* // Phys. Reports. 1989. V. 172 N 6 (whole issue). P. 339–407.
[11] *Block L.P.* Phys. of hot plasma in the magnetosphere / Ed B. Hultquist and L. Stenflo. N.-Y.–London: Plenum Press, 1975. P. 229–250.
[12] *Искусственные* пучки частиц в космической плазме / Под ред. Б. Гранналя. М.: Мир, 1985. 456 с.