

01;08

## Максимальный размер пузырька при автомоделных пульсациях

© А.О. Максимов

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,  
Владивосток  
E-mail: maksimov@poi.dvo.ru

Поступило в Редакцию 4 октября 2004 г.

Нахождение полной группы симметрии уравнения Рэлея, являющегося основой теоретического описания кавитации, позволило определить форму внешнего воздействия, приводящего к возникновению внутренней динамической симметрии в пульсациях пузырьков. Исследуется эффективность растяжения пузырька под действием периодически продолженного масштабно-инвариантного внешнего акустического поля. Показано, что данный тип воздействия, имеющий вид последовательности ударных волн, не приводит к заметной декомпрессии, что существенно снижает вероятность повреждения биологических тканей за счет кавитации, вызванной растягивающей фазой ударного импульса.

Основой теоретического описания акустической кавитации является уравнение Рэлея, определяющее поведение газового пузырька во внешнем звуковом поле

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{P_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \right] = \frac{P(t) - P_0}{\rho_0}. \quad (1)$$

Здесь  $P_0$ ,  $\rho_0$ ,  $R_0$ ,  $P$ ,  $R$  — равновесные и текущие значения давления и плотности жидкости, радиусов пузырьков;  $\gamma$  — показатель политропы. Традиционно кавитационные явления исследуются для внешнего воздействия в форме гармонического сигнала  $P(t) = P_0 - P_m \cos(\omega t)$  ( $P_m$ ,  $\omega$  — амплитуда и частота акустического поля). Вместе с тем в работах [1,2] была найдена полная группа симметрии уравнения Рэлея, и, как следствие, — определена форма внешнего воздействия, приводящая к появлению внутренней динамической симметрии в пульсациях пузырьков. В частности, масштабная инвариантность реализуется при следующей форме внешнего давления:  $P(t) = P_m [t_0 / (t + t_0)]^{6\gamma / (2+3\gamma)}$ ,  $t_0$  — время спадания. Возникает достаточно естественный вопрос:

насколько эффективно происходят растяжение и коллапс одиночного пузырька под действием периодически продолженного масштабнo-инвариантного внешнего воздействия

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_m \left[ \frac{t_0}{(t - kT) + t_0} \right]^{6\gamma/(2+3\gamma)} [\theta(t - kT) - \Theta(t - (k + 1)T)] \quad (2)$$

по сравнению с гармоническим (здесь  $T$  — период продолжения).

Периодически продолженное воздействие (2) может соответствовать реальному полю давления в экспериментальной ячейке только в том случае, если полный поток за период равен нулю [3]

$$\int_t^{t+T} dt' [P(t') - P_0] = 0. \quad (3)$$

Это условие устанавливает определенную связь между скачком давления на переднем фронте  $P_m$ , периодом  $T$  и характерным временем спада  $t_0$

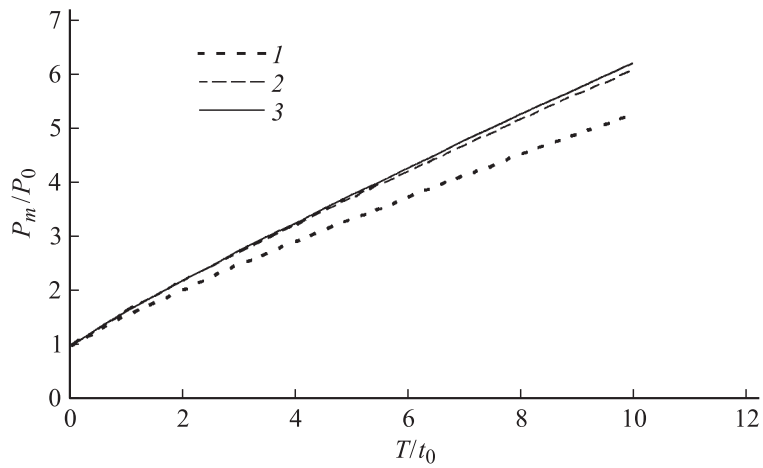
$$\frac{P_m}{P_0} = \frac{3\gamma - 2}{3\gamma + 2} \left( \frac{T}{t_0} \right) \left[ 1 - (1 + T/t_0)^{-(3\gamma-2)/(3\gamma+2)} \right]^{-1}. \quad (4)$$

Графическое представление соотношения (4) для значений показателя политропы  $\gamma = 1, (4/3), 1.4$  дано на рис. 1 кривыми 1, 2 и 3 соответственно.

Отметим, что в предельных случаях выражение (2) сводится к привычным объектам нелинейной акустики. Так, при  $(T/t_0) \ll 1$  мы имеем пилообразную волну, на одном периоде ( $0 \leq t \leq T$ ) которой

$$P(t) \approx P_0 [1 - (6\gamma/3\gamma + 2)(t - T/2)t_0^{-1}]. \quad (5)$$

При  $(T/t_0) \geq 1$  выражение (2) описывает последовательность ударных волн, подобных тем, что возникают при работе ультразвукового литотриптера [4]. Исследовать характер нелинейных пульсаций пузырьков в зависимости от формы огибающей мощной ультразвуковой волны можно, как правило, только с помощью численного решения уравнения Рэлея. Такие сравнительные расчеты для гармонической, симметричной и несимметричной пилообразной волн выполнены в [5]. В данной работе мы будем использовать в основном аналитические методы.



**Рис. 1.** Соотношение между скачком давления на переднем фронте и периодом продолжения.

Если период меньше времени спадания ( $T/t_0 \ll 1$ ), то амплитуда волны также мала (5) и можно найти точное решение линеаризованного уравнения Рэлея. Следуя [6], получаем

$$R = R_0 + \Delta R, \quad \xi = \dot{R} + i\Omega_0 \Delta R, \quad \frac{d\xi}{dt} - i\Omega_0 \xi = F,$$

$$F = \frac{6\gamma P_0}{\rho_0 R_0 (2 + 3\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[t - (k + 1/2)T]}{t_0} \{ \Theta(t - kT) - \Theta[t - (k + 1)T] \},$$

$$\xi(t) = e^{i\Omega_0 t} \left[ \int_0^t dt' F(t') e^{-i\Omega_0 t'} + \xi_0 \right]$$

$$= \frac{6\gamma P_0}{\rho_0 R_0 (2 + 3\gamma)} e^{i\Omega_0 (lT + \Delta t)} \left\{ \frac{e^{-i\Omega_0 T} - 1}{e^{-i\Omega_0 T} - 1} \int_0^T dt' \left( \frac{t' - T/2}{t_0} \right) e^{-i\Omega_0 t'} \right.$$

$$\left. + e^{-i\Omega_0 T} \int_0^{\Delta t} dt' \left( \frac{t' - T/2}{t_0} \right) e^{-i\Omega_0 t'} + \xi_0 \right\}, \quad t = lT + \Delta t,$$

$$\begin{aligned} \Delta R = \Omega_0^{-1} \text{Im} \xi = & \frac{2R_0}{(2+3\gamma)} \left\{ \left( \frac{\Delta t - T/2}{t_0} \right) + \left[ \frac{T}{2t_0} \cos(\Omega_0 \Delta t) - \frac{\sin(\Omega_0 \Delta t)}{2(t_0 \Omega_0)} \right] \right. \\ & + \frac{[(\Omega_0 T) \cos(\Omega_0 T/2) - 2 \sin(\Omega_0 T/2)]}{(t_0 \Omega_0)} \\ & \left. \times \left[ \cos(\Omega_0 \Delta t) \left( \frac{\sin(l \Omega_0 T)}{2 \sin(\Omega_0 T/2)} \right) - \sin(\Omega_0 \Delta t) \left( \frac{1 - \cos(l \Omega_0 T)}{2 \sin(\Omega_0 T/2)} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\Omega_0 = (3\gamma P_0 \rho_0^{-1} R_0^2)^{1/2}$  — собственная частота линейных пульсаций пузырька. В условиях резонанса между  $n$ -й гармоникой внешнего периодического поля и собственной частотой пузырька  $\Omega_0 T = 2\pi n$  коэффициенты в третьем слагаемом, которое описывает вклад  $l$  полных периодов, линейно растут со временем — числом периодов  $l$ . Учет затухания, естественно, ограничивает этот рост. При  $(\Omega_0 T) \ll 1$  пузырек не успевает в течение периода  $T$  в главном порядке по  $(T/t_0) \ll 1$  изменить свои размеры. При  $(\Omega_0 T) \gg 1$  максимальный размер  $R_{\max} \sim R_0 + 2R_0(2+3\gamma)^{-1}(T/t_0)$ , мало отличающийся от равновесного радиуса, достигается к моменту завершения фазы растяжения внешнего поля.

При росте периода поля, согласно (5), растет и амплитуда волны, так что при  $(T/t_0) > 1$  следует анализировать существенно нелинейный режим пульсаций. Если внешнее воздействие на пузырек меняется медленно по сравнению с периодом собственных колебаний  $2\pi/\Omega_0 < t_0$ , можно найти аналитическое решение, используя существование адиабатического инварианта. Как показано в [1], изменение радиуса пузырька в асимптотическом пределе  $t \gg t_0$  происходит в этом случае в виде наложения двух движений

$$\begin{aligned} R(t) = & R_0 \left( \frac{P_0}{P_m} \right)^{1/4} \left( \frac{t+t_0}{t_0} \right)^{1/3} + 0.01 R_0 \left( \frac{P_m}{P_0} \right) (t_0 \Omega_0)^{1/3} \\ & \times \sin \left\{ \left( \frac{P_m}{P_0} \right)^{3/4} (t_0 \Omega_0) \ln[\Omega_0(t+t_0)] + \alpha \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Во-первых, это инвариантное (автомодельное) решение уравнения (1), описывающее степенной рост с показателем, отличающимся от рэлеевского закона — первое слагаемое в (7). Второй тип движения — осцилляции с постоянной амплитудой и логарифмически растущим периодом. Выражение (7) получено для  $\gamma = 4/3$  и пузырька, находящегося

в состоянии покоя в момент прохождения ударного фронта. Во все последующие периоды внешнего воздействия структура решения (7) сохраняется, изменяются лишь амплитуда и фаза второго слагаемого. При достаточно большом  $t$  ( $T \gg t_0$ ), когда в течение периода успевают завершиться переходные процессы, доминирующим является первое слагаемое и максимальный радиус достигается перед приходом следующего ударного фронта. Для произвольного  $\gamma$  его величина равна

$$R_{\max} = R(T) = R_0(P_0/P_m)^{1/3\gamma}(T/t_0)^{2/2+3\gamma}. \quad (8)$$

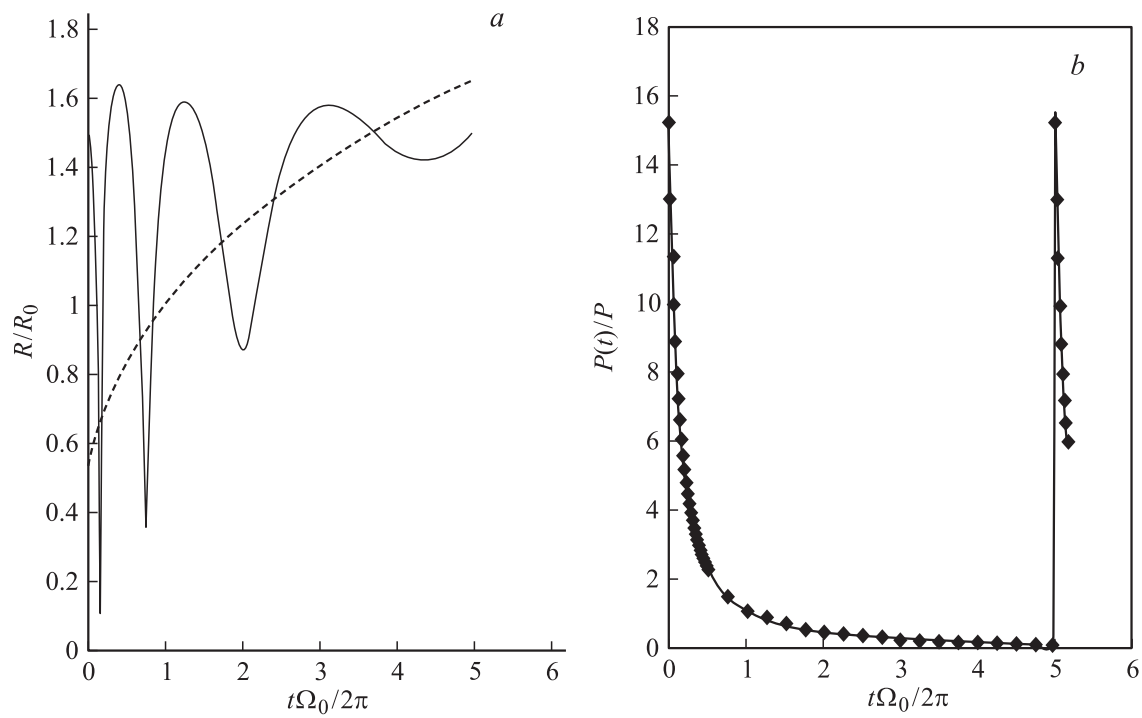
Используя уравнение связи (4) между амплитудой поля  $P_m$  и периодом  $T$ , находим  $R_{\max} \sim R_0(P_m/P_0)^{(3\gamma-2)/(3\gamma(3\gamma+2))}$ . Чрезвычайно малый показатель степени (для  $\gamma = 4/3$   $R_{\max} \sim R_0(P_m/P_0)^{1/12}$ ) и естественные ограничения на величину  $(P_m/P_0)$ , следующие из условия применимости уравнения Рэлея, приводят к тому, что максимальный радиус не может значительно превышать равновесного значения  $R_{\max} \sim R_0$ .

Если же время  $t_0$  сопоставимо или меньше, чем период собственных колебаний  $t_0 < 2\pi/\Omega_0$ , то этот случай при достаточно интенсивном воздействии ( $P_m/P_0 \geq 1$ ) не допускает аналитического описания, поэтому мы приведем результаты численных вычислений. Будем использовать следующие значения определяющих параметров  $\gamma = 4/3$ ,  $T = 10\pi t_0$ . Подставляя их в соотношение (4), получаем для амплитуды давления

$$(P_m/P_0) = (10\pi/3)[1 - (1 + 10\pi)^{-1/3}]^{-1} \approx 15.26. \quad (9)$$

Результаты расчета зависимости радиуса пузырька от времени в установившемся режиме представлены на рис. 2, *a* для  $(t_0\Omega_0) = 1$ . Штрихованной линией изображено масштабно-инвариантное решение. Рис. 2, *b* иллюстрирует зависимость от времени внешнего давления (2) для значения амплитуды, определяемой формулой (9). Несмотря на то что аналитическое решение (7) формально неприменимо в рассматриваемом случае  $t_0 < 2\pi/\Omega_0$ , оно качественно верно передает поведение кривой на рис. 2, *a*.

Наиболее существенной особенностью приведенного расчета является то, что и в этом, как и во всех разобранных выше случаях, периодически продолженное масштабно-инвариантное воздействие относительно неэффективно растягивает пузырек даже при уровне давления в мегапаскали. Это обстоятельство, с одной стороны, делает неперспективным использование этого этапа типа воздействия при



**Рис. 2.** Зависимость радиуса пузырька от времени в установившемся режиме (a) и форма внешнего воздействия (b), возбуждающая эти осцилляции.

изучении режима стабильной сонолюминесценции одиночного пузырька — явления, привлечшего наибольшее внимание исследователей акустической кавитации на протяжении последнего десятилетия [7]. С другой стороны, именно относительная неэффективность растяжения делает привлекательным использование этой формы импульса в литотрипсии — процессе разрушения камней в почках под действием ударных волн. В медицинской практике применяются последовательные из примерно 1000 ударных волн со скачком на переднем фронте до 60 МПа и временем спада в несколько микросекунд [8]. Относительно небольшое по сравнению со скачком на переднем фронте растягивающее давление в масштабно-инвариантном воздействии не очень значительно увеличивает размеры пузырька, тем самым существенно снижается вероятность повреждения тканей за счет кавитации, вызванной растягивающей фазой ударного импульса.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 04–02–16412.

## Список литературы

- [1] *Максимов А.О.* // Акуст. журн. 2002. Т. 48. В. 6. С. 805–812.
- [2] *Maksimov A.O.* // Commun. in Nonlin. Science and Numerical Simulations. 2004. V 9. N 1. P. 83–92.
- [3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [4] *Church C.C.* // J. Acoust. Soc. Am. 1989. V. 86. P. 215–227.
- [5] *Чуличков А.А., Хохлова В.А., Бэйли М.Р.* // Сборник трудов XI сессии Российского акустического общества. Т. 1. М.: ГЕОС, 2001. С. 56–59.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
- [7] *Brener M., Hilgenfeldt S., Lohse D.* // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. N 2. P. 425–483.
- [8] *Barnet S. et al.* // Ultrasound in Med. and Biol. 1998. V. 24. S11–S21.