

01;08

Применение преобразования Дарбу к спектральным задачам акустики океана

© А.И. Гудименко, А.Д. Захаренко

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,
Владивосток
E-mail: secret@poi.dvo.ru

Поступило в Редакцию 14 сентября 2004 г.

Предложено обобщение n -кратного преобразования Дарбу, подходящее для применения к спектральным задачам акустики в случае, когда среда стратифицирована по плотности. Для двукратного преобразования Дарбу и граничных условий, обычных для однослойной модели мелкого моря, получены условия, при которых спектр исходной и преобразованной спектральных задач совпадает. На указанной модели демонстрируются возможности n -кратного преобразования Дарбу по конструированию точно решаемых профилей скорости звука.

Преобразование Дарбу, широко используемое в настоящее время в квантовой механике для конструирования точно решаемых потенциалов одномерного уравнения Шредингера [1], не нашло пока должного применения в одномерной волновой акустике, несмотря на аналогию соответствующих спектральных задач. В частности, это касается и одномерной волновой акустики океана. В последней в отсутствие течения в качестве оператора спектральных задач выступает оператор Гельмгольца

$$L_0 := \rho \frac{d}{dz} \frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} + k_0^2 \quad \left(k_0 := \frac{\omega}{c_0} \right), \quad (1)$$

где $\rho(z)$ — плотность, $k_0(z)$ — акустическое волновое число, ω — круговая частота и $c_0(z)$ — скорость звука, а в качестве граничных условий берутся в общем случае произвольные импедансные и, если среда дискретно-слоистая, внутренние граничные условия [2]. Подчеркнем, что отличие данных акустических спектральных задач от квантово-механических — в наличии стратификации среды по плотности и более общих граничных условий.

В данной работе n -кратное преобразование Дарбу для оператора Шредингера [3] обобщается на операторы вида (1). При условиях, характерных для спектральных задач акустики мелкого моря, конструируются точно решаемые профили скорости звука. Демонстрируются возможности n -кратного преобразования для моделирования обычных для мелкого моря профилей скорости звука. Указывается на возможность моделирования профилей с „тонкой“ структурой. Для двукратного преобразования Дарбу показано, что существует два семейства точно решаемых профилей скорости звука, сохраняющих спектр исходной и преобразованной спектральных задач.

Определим n -кратное преобразование Дарбу оператора L_0 следующим образом. Используя преобразование Лиувилля [4] (в нашем случае это просто замена $\varphi \rightarrow \varphi/\sqrt{\rho}$, функций из области определения L_0), сведем этот оператор к оператору Гельмгольца с постоянной плотностью. Применим далее к результату обычное n -кратное преобразование Дарбу [3], а затем в полученном операторе с помощью обратного преобразованием Лиувилля вернемся к исходной плотности.

Обозначим так определенный оператор L_n . Он имеет прежний вид (1), но с новым акустическим волновым числом k_n . Для последнего, а также для собственных функций оператора L_n получаются представления

$$k_n^2 = k_0^2 + 2D^2 \ln \frac{\{\varphi_{\eta_1}, \dots, \varphi_{\eta_n}\}}{\rho^{n/2}}, \quad (2)$$

$$\varphi_{n\xi} = \frac{\{\varphi_\xi, \varphi_{\eta_1}, \dots, \varphi_{\eta_n}\}}{\{\varphi_{\eta_1}, \dots, \varphi_{\eta_n}\}}, \quad (3)$$

где $\varphi_\xi, \varphi_{\eta_1}, \dots, \varphi_{\eta_n}$ — собственные функции оператора L_0 , отвечающие собственным значениям $\xi^2, \eta_1^2, \dots, \eta_n^2$ соответственно, а фигурные скобки обозначают вронскиан, заключенных в них функций.

Таким образом, n -кратное преобразование Дарбу оператора L_0 определяется n собственными функциями $\varphi_{\eta_1}, \dots, \varphi_{\eta_n}$. Следуя [3], будем называть их функциями преобразования. При $\rho = \text{const}$ формулы (2) и (3) сводятся к обычным [3].

Функции преобразования, вообще говоря, произвольные собственные функции L_0 , и их выбор никак не связан ни с исходной спектральной задачей, ни со спектральной задачей для преобразованного оператора. Если граничные условия фиксированы, то спектры исходного и преобразованного операторов будут в общем случае различны.

Часто, однако, требование сохранения спектра является существенным. Как соответствующая возможность реализуется, мы далее обсудим на примере двукратного преобразования Дарбу и спектральной задачи с областью определения собственных функций $z \in [0, h]$ и граничными условиями $\varphi_\xi = 0$ и $D\varphi_\xi(h) = 0$.

По существу, необходимо найти условия на φ_{η_1} , φ_{η_2} , при которых $\varphi_{2\xi}$ и φ_ξ одновременно удовлетворяют рассматриваемым граничным условиям. На верхней границе имеем $\varphi_{2\xi} = \varphi_\xi = 0$. Вычисляя при этом условия вронскиан

$$\{\varphi_\xi, \varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\} = \begin{vmatrix} \varphi_\xi & \varphi_{\eta_1} & \varphi_{\eta_2} \\ \varphi'_\xi & \varphi'_{\eta_1} & \varphi'_{\eta_2} \\ (\xi^2 - k_0^2)\varphi_\xi & (\eta_1^2 - k_0^2)\varphi_{\eta_1} & (\eta_2^2 - k_0^2)\varphi_{\eta_2} \end{vmatrix},$$

получаем $\varphi_{\eta_1}(0)\varphi_{\eta_2}(0) = 0$. На нижней границе $D\varphi_{2\xi} = 0$ и $D\varphi_\xi = 0$. Первое равенство, учитывая, что

$$D\varphi_{2\xi} = \frac{D\{\varphi_\xi, \varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\}}{\{\varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\}} - \frac{\{\varphi_\xi, \varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\}D\{\varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\}}{\{\varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\}^2},$$

заведомо выполняется, если $D\{\varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\}(h) = 0$ и $D\{\varphi_\xi, \varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\}(h) = 0$. Вычисляя эти производные согласно представлению

$$D\{\varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\} = \begin{vmatrix} \varphi_{\eta_1} & \varphi_{\eta_2} \\ (\eta_1^2 - k_0^2)\varphi_{\eta_1} & (\eta_2^2 - k_0^2)\varphi_{\eta_2} \end{vmatrix},$$

$$D\{\varphi_\xi, \varphi_{\eta_1}, \varphi_{\eta_2}\} = \begin{vmatrix} \varphi_\xi & \varphi_{\eta_1} & \varphi_{\eta_2} \\ \varphi'_\xi & \varphi'_{\eta_1} & \varphi'_{\eta_2} \\ (\xi^2 - k_0^2)\varphi'_\xi & (\eta_1^2 - k_0^2)\varphi'_{\eta_1} & (\eta_2^2 - k_0^2)\varphi'_{\eta_2} \end{vmatrix},$$

получаем $\varphi_{\eta_1}(h)\varphi_{\eta_2}(h) = 0$ и $D\varphi_{\eta_1}(h)D\varphi_{\eta_2}(h) = 0$. Итак, искомые условия суть

$$\varphi_{\eta_1}(0)\varphi_{\eta_2}(0) = 0, \quad \varphi_{\eta_1}(h)\varphi_{\eta_2}(h) = 0, \quad D\varphi_{\eta_1}(h)D\varphi_{\eta_2}(h) = 0.$$

Мы видим, таким образом, что в случае двукратного преобразования Дарбу требование сохранения спектра приводит к двум семействам функций преобразования, выделяемых соответственно условиями

$$\varphi_{\eta_1}(0) = 0, \quad \varphi_{\eta_1}(h) = 0, \quad D\varphi_{\eta_2}(h) = 0, \quad (4)$$

$$\varphi_{\eta_1}(0) = 0, \quad D\varphi_{\eta_1}(h) = 0, \quad \varphi_{\eta_2}(h) = 0. \quad (5)$$

Обратим внимание на условность нашего употребления фразы „сохранение спектра“. На самом деле в случае n -кратного преобразования Дарбу требование, чтобы $\varphi_{n\xi}$ и φ_ξ удовлетворяли одним и тем же граничным условиям, гарантирует сохранение спектра лишь с точностью до конечного, не превышающего n , числа точек. Точнее, спектр сохраняется, если точки $\eta_1^2, \dots, \eta_n^2$ ему не принадлежат, и может нарушаться в этих точках в противном случае [1,3]. Так, для двукратного преобразования Дарбу характерно полное сохранение спектра при условии (4) и сдвиг одного из спектральных значений при условии (5).

В оставшейся части работы мы приводим результаты компьютерных вычислений точно решаемых профилей скорости звука однослойной модели $z \in [0, h]$ со стратификацией по плотности вида $\rho(z) = \rho_0 \exp(2\gamma z)$, где ρ_0 и γ — константы, полученные двукратным и четырехкратным преобразованиями Дарбу профиля $c_0 = \text{const}$. Мы приводим лишь профили, при которых спектр сохраняется. В качестве граничных условий соответствующих спектральных задач берутся $\varphi_\xi(0) = 0$ и $D\varphi_\xi(h) = 0$. Отметим, что в отсутствие требования сохранения спектра возможности преобразования Дарбу по конструированию решаемых профилей скорости звука гораздо шире.

Функции преобразования суть

$$\varphi_{\eta_i}(z) = e^{\gamma z} \cos(k_{\eta_i} z + \alpha_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

где k_{η_i} удовлетворяет соотношению $-k_{\eta_i}^2 + k_0^2 - \gamma^2 = \eta_i^2$ и $\alpha_i \in [0, 2\pi]$. Собственные функции исходной спектральной задачи φ_{ξ_j} имеют тот же вид с $\alpha_i = \pi/2$ и k_{ξ_j} , удовлетворяющим уравнению

$$\text{tg}(k_{\xi_j} h + \pi/2) = \gamma/k_{\xi_j}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Расчеты проводились при глубине $h = 100$ м и частотах от 50 до 150 Hz. Начальная скорость звука варьировалась от 1460 до 1565 м/с, коэффициент γ изменялся от 0 до 0.001 м^{-1} . Значения η_i^2 брались в пределах, соответствующих нескольким начальным модам исходной спектральной задачи.

На рис. 1 представлены профили, характерные для двукратного преобразования Дарбу в случае, когда параметр η_1^2 отвечает первой моде спектральной задачи для L_0 с граничными условиями (4) (слева) и 5 (справа). Увеличение этого параметра ведет к росту числа экстремумов на профиле. Отметим, что профили неодинаково

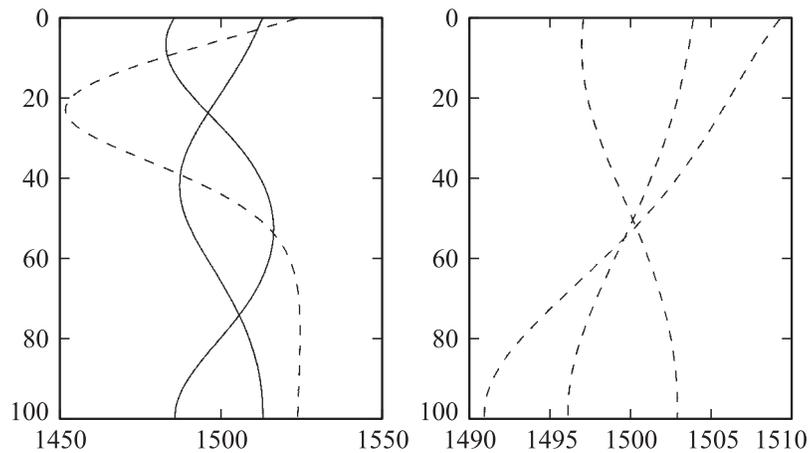


Рис. 1. Профили скорости звука, полученные двукратным преобразованием Дарбу при $\gamma = 0.001 \text{ м}^{-1}$, $c_0 = 1500 \text{ м/с}$ и частоте 50 Hz .

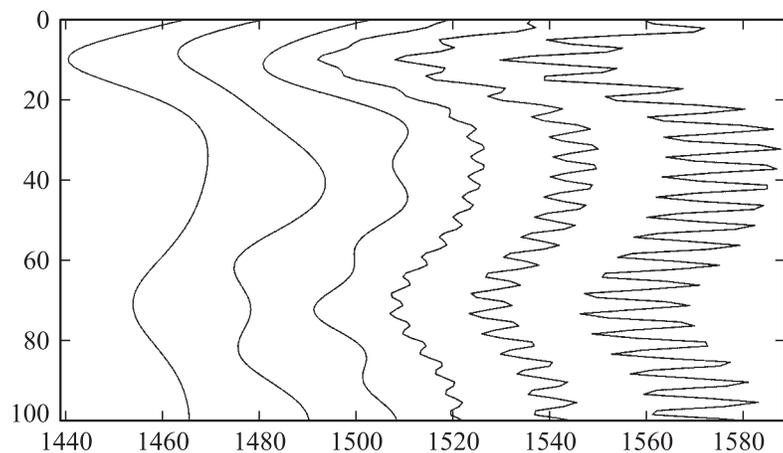


Рис. 2. Моделирование „тонкой структуры“ профилей скорости звука. Профили получены четырехкратным преобразованием Дарбу соответственно профилей $c_0 = 1460, 1480, 1500, 1515, 1535, 1565 \text{ м/с}$ при $\gamma = 0.001 \text{ м}^{-1}$ и частоте 150 Hz .

чувствительны к изменению γ . Большую чувствительность проявляют профили, изображенные на рисунке пунктиром.

Рис. 2 иллюстрирует одно интересное свойство n -кратного ($n \geq 3$) преобразование Дарбу, а именно возможность моделирования „тонкой структуры“ профилей скорости звука, т.е. наложения на данный профиль возмущения в виде профиля с большим числом колебаний. Исходный профиль, считая слева направо, изображен на рисунке первым. Функции преобразования брались следующим образом: φ_{η_1} и φ_{η_2} удовлетворяли условию (4) с фиксированными значениями параметров, φ_{η_3} и φ_{η_4} удовлетворяли условию (5), свободные параметры последних варьировались. В частности,

$$\varphi_{\eta_1}(z) = e^{\gamma z} \sin(2\pi z/h), \quad \varphi_{\eta_3}(z) = e^{\gamma z} \sin(k_{\xi_j} z), \quad j = 1, 4, 6, 21,$$

где k_{ξ_j} находится из уравнения (6).

Завершая эту заметку, отметим, что с нашей точки зрения преобразование Дарбу является простым и эффективным методом как построения решаемых профилей скорости звука для модельных задач, так и аппроксимации реальных профилей точно решаемыми.

Мы благодарим М.Ю.Трофимова, привлечшего наше внимание к теме статьи.

Работа выполнена в рамках госконтракта 10002–251/П–17/026–387/190504–301.

Список литературы

- [1] Захарьев Б.Н., Чабанов В.М. Послушная квантовая механика. Новый статус теории в подходе обратной задачи. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 299 с.
- [2] Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 414 с.
- [3] Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. // ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 356–367.
- [4] Левин Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.