01;03

Вычисление скорости скольжения молекулярного газа вдоль сферической поверхности малого радиуса кривизны

© А.В. Латышев, В.Н. Попов, А.А. Юшканов

Поморский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Архангельск

Поступило в Редакцию 18 июня 2004 г.

Представлены результаты, полученные с использованием точных аналитических методов в задачах о тепловом и изотермическом скольжениях молекулярного газа вдоль твердой сферической поверхности малого радиуса кривизны. В линейном по числу Кнудсена приближении вычислены коэффициенты теплового и изотермического скольжений при обтекании молекулярным газом сферической поверхности. В качестве основного уравнения использовано обобщение БГК-модели (Бхатнагар–Гросс–Крук) кинетического уравнения Больцмана на случай вращательных степеней свободы. Проведены численные расчеты коэффициентов теплового и изотермического скольжений для ряда молекулярных газов. Показана зависимость найденных коэффициентов скольжения от числа Прандтля.

Введение. Описание молекулярных газов носит принципиально более сложный характер, чем описание одноатомного газа [1]. Это связано с тем, что при описании процессов, происходящих в молекулярных газах, необходимо учитывать не только поступательное, но и вращательное движение молекул, а также колебательные степени свободы молекул газа. Граничные условия к уравнениям гидродинамики в режиме течения со скольжением в задачах, связанных с обтеканием одноатомным газом искривленных поверхностей, изучены к настоящему времени весьма подробно как с использованием точных, так и приближенных методов. Иначе обстоит дело с постановкой граничных условий к уравнениям гидродинамики в случае обтекания искривленных поверхностей молекулярными газами. Сведения о точных аналитических решениях подобного рода задач в открытой печати в настоящее время отсутствуют.

Целью представленной работы является построение точных аналитических решений задач о тепловом и изотермическом скольжениях разреженного молекулярного газа вдоль сферической поверхности малого радиуса кривизны (число Кнудсена порядка $0.03 \div 0.4$). В качестве основного уравнения используется обобщение БГК-модели кинетического уравнения Больцмана на случай вращательных степеней свободы молекул газа, построенного в [2]. Предполагается, что колебательные степени свободы молекул газа „заморожены“, а вращательные описываются на основе классической кинетической теории газов. Расчеты показывают, что такой подход к описанию молекулярных газов справедлив для достаточно широкого диапазона температур порядка от 10 до 1000 K.

1. Постановка задачи. Вывод основных уравнений. Рассмотрим сферическую аэрозольную частицу, взвешенную в потоке разреженного молекулярного газа. Предположим, что вдали от поверхности задан постоянный градиент температуры ∇T. Вследствие столкновения молекул, движущихся в тонком пристеночном слое толщиной порядка длины свободного пробега молекул газа, называемом часто слоем Кнудсена, с неравномерно нагретой поверхностью вдоль последней возникает макроскопическое движение газа, называемое тепловым скольжением.

Свяжем с центром кривизны поверхности сферическую систему координат, полярная ось которой направлена вдоль градиента температуры вдали от поверхности. Тогда в силу осевой симметрии задачи, отличной от нуля, будет касательная к поверхности компонента массовой скорости U_θ. Так как поверхность непроницаема для частиц газа, то радиальная компонента массовой скорости газа на поверхности $U_r\big|_S = 0$.

Предположим, что касательная к поверхности, составляющая скорости газового потока, не постоянна, а медленно меняется вдоль направления нормали к поверхности. Наличие неравномерности распределения массовой скорости в слое Кнудсена приводит к дополнительному скольжению газа вдоль поверхности, называемому изотермическим скольжением.

Таким образом, в задаче отличны от нуля величины $k_1 = \partial U_\theta/\partial r\big|_\infty$ и $k_2 = (1/R)(\partial \ln T/\partial\theta)\big|_\infty$. Будем считать эти величины малыми. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения частиц газа по координатам и скоростям, которую можно записать в виде

$$f = f^{(0)}\left[1 + Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)\right],$$

где $f^{(0)}$ — локально-равновесная функция распределения в объеме газа вдали от поверхности аэрозольной частицы; $\mathbf{r} = 3\sqrt{\pi}\,\mathrm{Pr}/(4\lambda)\mathbf{r}'$ при описании изотермического скольжения и $\mathbf{r} = \sqrt{\pi}\,\mathrm{Pr}/(2\lambda)\mathbf{r}'$ при описании теплового скольжения; $\mathbf{r}'$ — размерный радиус-вектор, λ — средняя длина свободного пробега молекул газа, связанная с его кинематической вязкостью ν_g соотношением $\lambda = \nu_g(\pi m/2k_B T_w)^{1/2}$; Pr — число Прандтля; $\mathbf{C} = \mathbf{V}\sqrt{m/2k_B T_w}$; $\nu = \omega\sqrt{J/2k_B T_w}$; $\mathbf{v}$ и ω — поступательная и вращательная скорости молекул газа; T_w — температура поверхности частицы; k_B — постоянная Больцмана; m, J — масса и момент инерции молекул газа, а $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$ является решением уравнения [3]

$$C_r\,\frac{\partial Y}{\partial r} + Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) + k\left[C_\theta\,\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{C_\varphi}{\sin\theta}\,\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + (C_\theta^2 + C_\varphi^2)\,\frac{\partial Y}{\partial C_r}\right.$$
$$\left. + (C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_r C_\theta)\,\frac{\partial Y}{\partial C_\theta} - (C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_r C_\varphi)\,\frac{\partial Y}{\partial C_\varphi}\right]$$
$$= \int k(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu')Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}', \nu')d\Omega. \tag{1}$$

Здесь [3] $l = 2$, $d\Omega = 2\pi^{-3/2}\exp(-C^2 - \nu^2)\nu\,d\nu\,d^3C$ для двухатомного газа, $l = 5/2$, $d\Omega = \pi^{-3}\exp(-C^2 - \nu^2)d^3\nu\,d^3C$ для многоатомного газа (число атомов в молекуле $N \geqslant 3$); $k = 4\,\mathrm{Kn}/(3\sqrt{\pi}\,\mathrm{Pr})$ при описании изотермического скольжения и $k = 2\,\mathrm{Kn}/(\sqrt{\pi}\,\mathrm{Pr})$ при описании теплового, $\mathrm{Kn} = \lambda/R'$ — число Кнудсена, R' — размерный радиус аэрозольной частицы,

$$k(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu') = 1 + 2\,\mathbf{C}\,\mathbf{C}'$$
$$+ \frac{1}{l + 1/2}\,(C^2 + \nu^2 - l - 1/2)(C'^2 + \nu'^2 - l - 1/2).$$

Следуя [4], $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$ будем искать в виде разложения по параметру k

$$Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) = Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) + kY_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) + \ldots \tag{2}$$

Учитывая (2), в ряд по параметру k будут разложены и гидродинамические характеристики потока газа. В частности, касательная к поверхности частицы компонента массовой скорости U_θ

$$U_\theta = U_\theta^{(1)} + kU_\theta^{(2)} + \dots \tag{3}$$

Здесь $U = U'\sqrt{m/2k_B T_w}$ — безразмерная массовая скорость газа. Подставляя (2) в (1) и приравнивая слагаемые при k, приходим к уравнению для нахождения функций $Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$ и $Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$

$$C_r \frac{\partial Y_1}{\partial r} + Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) = \int k(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu') Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}', \nu') \, d\Omega, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} C_r \frac{\partial Y_2}{\partial r} + Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) = & \int k(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu') Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}', \nu') \, d\Omega \\ & - \left[(C_\theta^2 + C_\varphi^2) \frac{\partial Y_1}{\partial C_r} + (C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_r C_\theta) \frac{\partial Y_1}{\partial C_\theta} \right. \\ & \left. - (C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta) + C_r C_\varphi) \frac{\partial Y_1}{\partial C_\varphi} \right] - C_\theta \frac{\partial Y_1}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{5}$$

Решения уравнений (4) и (5) ищем в виде

$$Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) = C_\theta \varphi_1(x, C_r) + C_\theta (C_\theta^2 + C_\varphi^2 + \nu^2 - l - 1) \varphi_2(x, C_r), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) = & C_\theta \psi_1(x, C_r) + C_\theta (\nu^2 - l + 1) \psi_2(x, C_r) \\ & + \sum_{k=3}^{\infty} b_k(C_\theta, C_\varphi) \psi_k(x, C_r, \nu), \end{aligned} \tag{7}$$

где $x = r - R$, а C_θ в совокупности с $b_k(C_\theta, C_\varphi)$ образует в пространстве скоростей полную систему ортогональных многочленов. Для краткости в аргументах функций, входящих в $Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$ и $Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$, опущен аргумент θ, а под ортогональностью в пространстве скоростей C_θ и $b_k(C_\theta, C_\varphi)$ подразумевается равенство нулю интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-C_\theta^2 - C_\varphi^2) C_\theta b_k(C_\theta, C_\varphi) \, dC_\theta \, dC_\varphi.$$

Подставим (6) и (7) в (4) и (5). Домножим полученные соотношения на $\nu C_\theta \exp(-C_\theta^2 - C_\varphi^2 - \nu^2)$ для двухатомного газа и $C_\theta \exp(-C_\theta^2 - C_\varphi^2 - \nu^2)$ для многоатомного и проинтегрируем в случае двухатомного газа по C_θ и C_φ от $-\infty$ до $+\infty$ и ν от 0 до $+\infty$, а в случае многоатомного газа по C_θ, C_φ и ν от $-\infty$ до $+\infty$. В итоге приходим к системе уравнений для нахождения $\varphi_i(x,\mu)$ и $\psi_i(x,\mu)$ $(i = 1, 2)$, $\mu = C_r$

$$\mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \varphi_1(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)\varphi_1(x,\tau)\, d\tau, \tag{8}$$

$$\mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \varphi_2(x,\mu) = 0, \tag{9}$$

$$\mu \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \psi_1(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2)\psi_1(x,\tau) d\tau$$

$$+ \mu\varphi_1(x,\mu) - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} + 2\mu\varphi_2(x,\mu) - 4\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu}, \tag{10}$$

$$\mu \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \psi_2(x,\mu) = 4\mu\varphi_2(x,\mu) - 2\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu}.$$

Предположим, что молекулы газа отражаются от поверхности аэрозольной частицы диффузно. Тогда, учитывая, что

$$f^{(0)} = f^0 \Big[1 + 2C_\theta U_\theta(\infty) + (C^2 - \nu^2 - l - 1/2)\tau(\infty)$$

$$- (C^2 - \nu^2 - l - 1/2)\Big(C_r \frac{\partial \ln T}{\partial r} + \frac{C_\theta}{r}\frac{\partial \ln T}{\partial \theta}\Big) - 2C_r C_\theta \frac{\partial U_\theta}{\partial r}\Big],$$

$$U_\theta(\infty) = U_\theta(0) + \frac{\partial U_\theta}{\partial r}(r - R),$$

$$\tau(\infty) = \varepsilon_T + \frac{\partial \ln T}{\partial r}(r - R) + \frac{\partial \ln T}{\partial \theta}\theta,$$

$$f^0 = \left(\frac{m}{2\pi k_B T_w}\right)^{3/2} \frac{J}{k_B T_w}\exp(-C^2 - \nu^2)$$

для двухатомного газа [3] и

$$f^0 = \left(\frac{m}{2\pi k_B T_w}\right)^{3/2} \frac{(J_1 J_2 J_3)^{1/2}}{(2\pi k_B T_w)^{3/2}} \exp(-C^2 - \nu^2)$$

для многоатомного (здесь J_1, J_2, J_3 — проекции вектора момента инерции молекул газа), граничные условия для искомых функций запишутся в виде

$$\varphi_1(0,\mu) = -2U_\theta^{(1)}\big|_S + 2\mu k_1 + \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)k_2, \quad \mu > 0, \tag{11}$$

$$\varphi_1(\infty,\mu) = 0, \qquad \mu < 0; \tag{12}$$

$$\varphi_2(0,\mu) = k_2, \qquad \mu > 0, \qquad \varphi_2(\infty,\mu) = 0, \qquad \mu < 0, \tag{13}$$

$$\psi_1(0,\mu) = -2U_\theta^{(2)}\big|_S; \quad \mu > 0, \qquad \psi_1(\infty,\mu) = 0, \quad \mu < 0; \tag{14}$$

$$\psi_2(0,\mu) = 0, \quad \mu > 0, \qquad \psi_2(\infty,\mu) = 0, \quad \mu < 0.$$

Таким образом, решение задачи о скольжении разреженного молекулярного газа вдоль слабо искривленной поверхности сводится к решению уравнений (8)–(10) с граничными условиями (11)–(14).

2. Формулировка основных результатов. Система уравнений (8)–(10) с граничными условиями (11)–(14) не включает в себя вращательных скоростей молекул газа и полностью совпадает с аналогичной системой уравнений и граничных условий, полученных в [5,6] при исследовании теплового и изотермического скольжений одноатомного газа вдоль сферической поверхности с использованием БГК-модели кинетического уравнения Больцмана. Учитывая (3) и полученные в [5,6] результаты, находим

$$U_\theta\big|_S = U_\theta^{(1)}\big|_S + kU_\theta^{(2)}\big|_S + \ldots$$

$$U_\theta^{(1)}\big|_S = -Q_1 k_1 - (Q_2 + 1/2)k_2/2, \tag{15}$$

$$U_\theta^{(2)}\big|_S = -k_1(Q_3 + Q_1 Q_2)k_2. \tag{16}$$

Здесь $Q_1 = -1.01619$, $Q_2 = -1.2663$, $Q_3 = -1.8207$ суть лоялковские интегралы [7].

Зависимость коэффициентов скольжения от числа Прандтля (Pr)

Газ	Pr	$C_m^{(0)}$	$C_m^{(1)}$	$K_{TS}^{(0)}$	β'
Cl_2	0.64	1.1945	1.1567	1.1436	2.3467
CO	0.74	1.0331	1.0004	1.0354	2.1247
CH_4	0.75	1.0193	0.9871	1.0216	2.0964
SO_2	0.85	0.8994	0.8709	0.9014	1.8498
NH_3	0.93	0.8220	0.7960	0.8239	1.6906
H_2O	1.01	1.7569	0.7330	0.7586	1.5567

Переходя в (15), (16) к размерным величинам [8], находим

$$U'_\theta\Big|_S = 0.7645\,\mathrm{Pr}^{-1}\lambda(1 - 0.7403\,\mathrm{Pr}^{-1}\,\mathrm{Kn})\,\frac{\partial U'_\theta}{\partial r'}\Big|_\infty + 0.7662\,\mathrm{Pr}^{-1}\nu_g(1 - 1.5723\,\mathrm{Pr}^{-1}\,\mathrm{Kn})\,\frac{\partial \ln T}{R'\partial\theta}\Big|_\infty. \qquad (17)$$

Таким образом, в случае обтекания молекулярным газом сферической поверхности $C_m^{(0)} = 0.7645\,\mathrm{Pr}^{-1}$, $C_m^{(1)} = 0.7403\,\mathrm{Pr}^{-1}$, $K_{TS}^{(0)} = 0.7662\,\mathrm{Pr}^{-1}$, $\beta' = 1.5723\,\mathrm{Pr}^{-1}$. Значения коэффициентов скольжения для некоторых молекулярных газов приведены в таблице. Заметим, что для одноатомных газов $C_m^{(0)} = 1.1466$, $C_m^{(1)} = 1.1104$, $K_{TS}^{(0)} = 1.1499$, $\beta' = 2.3590$ [5,6] и не зависят от числа Прандтля.

Заключение. В работе в линейном по числу Кнудсена приближении получены выражения для коэффициентов теплового и изотермического скольжений разреженного молекулярного газа вдоль твердой сферической поверхности. Показано, что в отличие от задач о температурном скачке [2] и тепловом скольжении второго порядка [9] учет вращательных степеней свободы молекул газа с использованием модельного уравнения, предложенного в [3], в задачах о тепловом и изотермическом скольжениях молекулярного газа вдоль искривленной поверхности приводит к тем же самым уравнениям и граничным условиям, что и в случае одноатомного газа. В то же время показано, что значения коэффициентов теплового и изотермического скольжений существенным образом зависят от значений числа Прандтля.

Список литературы

[1] *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
[2] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ПММ. 2002. Т. 66. В. 5. С. 845–854.
[3] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* Точные решения граничных задач для молекулярных газов. Монография. Деп. в ВИНИТИ от 4.06.1998, № 1725–В 98. 186 с.
[4] *Sone Y.* // I. Rarefied Gas Dynamics: N. Y.; L.: Acad. Press, Proc. 6th Intern. Symp. 1969. V. 1. P. 243–253.
[5] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5. № 3 (11). С. 103–114.
[6] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2003. № 6. С. 111—116.
[7] *Loyalka S.K.* // Transport theory and statistical physics. 1975. V. 4. P. 55–65.
[8] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* Неоднородные кинетические задачи. Метод сингулярных интегральных уравнений: Монография. Архангельск: Поморский университет, 2004. 266 с.
[9] *Попов В.Н.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 19. С. 10–16.